Math. P.
547.h

Math. P. 54 ph

Steinberger

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Das

Verhältniss

des

Kreisbogens,

zu seinen

zuständigen trigonometrischen Funktionen

vollständig bearbeitet.

Mit

einem Anhange, enthaltend: Lösung einiger hieher gehöriger Aufgaben, so wie auch der bisher nur näherungsweise gelösten Eulerischen Aufgaben über die Kreislinie (s. L. Euleri Introd. in Analysin Infinit. tom. II. cap. 22.)

Von

A. Steinberger,

Professor der Mathematik am Gymnasium zu Regensburg.

Mit einer Figurentafel.

Regensburg, 1839.

Verlag von **Georg Joseph Manz.**

191. 73

Die Wahrheit weiß von keinem Lieblingssohn;
Auch du bist ihr geliebter Späher.

Tiedge's Urania.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Es ereignet sich nicht selten, daß ein Kreisbogen nebst einer seiner zuständigen Funktionen nach irgend einem Maaße gegeben ist, und daß daraus der entsprechende Winkel, oder was auf das nämliche hinausgeht, der Halbmesser des zugehörigen Kreises gesucht werden soll. Eine vollständige Behandlung dieser an sich nicht unwichtigen und im Gebiete der Mathematik sehr ausgebreiteten Aufgabe habe ich in unsern auch den reichhaltigsten mathematischen Werken nicht gefunden. Nur Euler behandelt im Anhange zu seiner Introductio in Analysyn Infinitorum einige hieher gehörige besondere Fälle, aber nur durch die Regula Falsi und annäherungsweise, und in der Soldnerischen Landesvermessung Bayerns ist die Berechnung des Verhältnisses zwischen Sinus und Bogen ein wichtiges Moment; aber demungeachtet ist dazu von Soldner selbst nur ein für sehr kleine Winkel und Bögen, wie es eben sein Zweck war, brauchbares Annäherungsverfahren eingeschlagen worden. Ich glaubte daher um so eher, diese Schrift der Oeffentlichkeit übergeben zu dürfen, als zu erwarten steht, daß der Mangel einer solchen vielseitig und längst schon gefühlt worden, indem ähnliche Aufgaben, wie die im Anhange beigefügten, nicht eben zu den seltenen gehören, und ihre Lösung im Allgemeinen anders nicht wohl gefunden werden kann.

Die Kreislinie hat den Mathematikern aller Zeiten vieles zu schaffen gegeben; sie ist auch zu tief eingreifend in das Reich des mathematischen Wissens, als daß sie nicht immer

Stoff zu neuen Forschungen darböte und selbe durch neue Entdeckungen lohnte. Auch diese Blätter sollen dazu beitragen, eine vollständigere Kenntniß über die Natur und Wesenheit derselben zu verbreiten, wobei ich auch gelegentlich in Erwähnung bringen will, daß für die ludolphische Zahl π ein endlich geschlossener Ausdruck besteht, nämlich

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \sqrt{-1}.$$

In der Bezeichnung bestimmter Zahlenausdrücke, wie der Bernoullischen Zahlen, der Coefficienten der trigonometrischen Reihen u. s. w. habe ich mich nach Herrn Professor Schnürlein gerichtet, welcher in seinem Programme v. J. $18\frac{32}{33}$ *) eine allgemeine Theorie derselben begründet hat und hierin als Gewährsmann und erste Autorität zu achten ist.

Vollständig nenne ich diese Arbeit nur deßwegen, weil sie sich gleichmäßig über sämmtliche Kreisfunktionen verbreitet.

Mit dem Wunsche, zur Ausbreitung und Anwendung der mathematischen Lehren beizutragen, lege ich diese Erstlinge meines literarischen Strebens der Oeffentlichkeit dar, — Ergebnisse langjährigen Bemühens, dessen Vielfachheit jetzt nach der Vollendung kaum sich ahnen läßt, — meine Mühe wird aber hinläglich belohnt seyn durch die Ueberzeugung, daß derjenige nicht fruchtlos arbeitet, der nach diesem Ziele strebt.

---

*) Erweiterung und Verallgemeinerung der bisher zwischen den trigonometrischen und andern Funktionen und zwischen den Koeffizienten der niedrigsten Glieder in den Summen der Potenzen ganzer Zahlen bekannt gewesenen Relationen. Ein Programm zum Schlusse des Studien-Jahres 1832/33 von Ludwig Christoph Schnürlein, Professor der Mathematik. Hof. Gedruckt bei Karl Höreth.

Erstes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seinem zuständigen Sinus.

1. Es sei der Halbmesser des Kreises $r=1$, ferner bezeichne φ irgend einen Bogen desselben, und q diejenige Größe, mit welcher der Sinus multiplicirt werden muß, um seinem Bogen gleich zu werden, so hat man:

$\varphi = q \sin\varphi$, und

$$q = \frac{\varphi}{\sin\varphi} = \varphi \operatorname{cosec}\varphi = \frac{\sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{2.3} + \frac{1.3.\sin^5\varphi}{2.4.5} + \frac{1.3.5.\sin^7\varphi}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7\sin^9\varphi}{2.4.6.8.9} + \ldots}{\sin\varphi}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2\varphi}{2.3} + \frac{1.3.\sin^4\varphi}{2.4.5} + \frac{1.3.5\sin^6\varphi}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.\sin^8\varphi}{2.4.6.8.9} + \ldots\ldots$$

2. Um aber, wenn man lieber will, q zu erhalten durch den Bogen φ ausgedrückt, so ist ebenfalls:

$$q = \varphi \operatorname{cosec}\varphi = 1 + \frac{2(2^1-1)\overset{1}{B}\varphi^2}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\overset{2}{B}\varphi^4}{1.2.3.4} + \frac{2.(2^5-1)\overset{3}{B}\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{2(2^7-1)\overset{4}{B}\varphi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \ldots$$

wo $\overset{1}{B}, \overset{2}{B}, \overset{3}{B}$..... der Ordnung nach die Bernoullischen Zahlen bedeuten.

3. Jetzt erst steht es in unserer Gewalt, wenn die Verhältnißzahl q zwischen Sinus und Bogen oder zwischen Sehne und Bogen bekannt ist, daraus den zuständigen Bogen zu finden. Kehrt man nämlich die Reihe in (1) um, so wird:

$$\sin\varphi = (6(q-1))^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{3^3(q-1)}{2^2.5} + \frac{3^3.323(q-1)^2}{2^5.5^2.7} - \frac{3^2.21197(q-1)^3}{2^7.5^3.7} + \frac{3^5.1030999(q-1)^4}{2^{11}.5^3.7^2.11} - \ldots\right)$$

4. Von dieser Reihe läßt sich jedoch nur dann ein vortheilhafter Gebrauch machen, wenn der fragliche Bogen φ ziemlich klein ist, weil sie außerdem zu schwach convergirt.

5. Kehrt man die in (2) für q aufgestellte Reihe um, so erhält man zwar:

$$\varphi = (6(q-1))^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{7(q-1)}{4.5.6} + \frac{1161(q-1)^2}{4.5.6.7.8.10} - \frac{18579(q-1)^3}{2^3.3.4.5^2.6.7.8.9} + \frac{15500421(q-1)^4}{2^7.3.4.5^2.6.7^2.8.9.10.11} - \ldots\right)$$

welche Reihe aber ebenfalls wie die in (3) für sin φ hergestellte bei größeren Winkeln nicht genugsam convergirt.

6. Sucht man aber aus der Reihe

$$\varphi = \sin\varphi + \frac{\sin^3\varphi}{1.2.3} + \frac{\sin^5\varphi}{1.2.3.4.5} + \frac{\sin^7\varphi}{1.2\ldots7} + \ldots$$

den natürlichen Logarithmus für sin φ, so erscheint

$$\log\sin\varphi = \log\varphi - \frac{\varphi^2}{2.3} - \frac{\varphi^4}{2^2.3^2.5} - \frac{\varphi^6}{3^4.5.7} - \frac{\varphi^8}{2^3.3^3.5^2.7} - \frac{\varphi^{10}}{3^5.5^2.7.11} - \ldots$$

und weil

$$\log q = \log\varphi - \log\sin\varphi$$

so ergibt sich

$$\log q = \frac{\varphi^2}{2.3} + \frac{\varphi^4}{2^2.3^2.5} + \frac{\varphi^6}{3^4.5.7} + \frac{\varphi^8}{2^3.3^3.5^2.7} + \frac{\varphi^{10}}{3^5.5^2.7.11} + \ldots.$$

woraus man durch Umkehrung erhält:

$$\varphi = \sqrt{2.3\log q}\Big[1 - \frac{\log q}{2.5} - \frac{13.\log^2 q}{2^3.3.5^2.7} + \frac{9\log^3 q}{2^4.5^3.7} + \frac{17597\log^4 q}{2^7.3^2.5^3.7^2.11}$$

$$- \frac{242660377.\log^5 q}{2^6.3^2.5^4.7^2.11.13} + \frac{98239754969.\log^6 q}{2^{10}.3^3.5^6.7^3.11.13} \ldots.\Big]$$

eine sehr brauchbare Reihe nicht nur für alle Bögen im ersten Quadranten, sondern auch so lange q ungefähr die Basis $e = 2{,}7182818\ldots$ des natürlichen Logarithmensystemes nicht erreicht. Erreicht aber q diese Größe, was bei einem Bogen $\varphi = 126^0\ 0'\ 1{,}75''$ geschieht, oder überschreitet sie wohl gar, so ist auch hiedurch so wie durch die in (3) und (5) hergestellten Reihen wegen zu schwacher Convergenz derselben die Auflösung der vorliegenden Aufgabe nicht wohl möglich.

7. Noch weit weniger genügen alle die bisherigen Reihen, wenn φ irgend ein Vielfaches von π einschließt, weil alsdann q, von dem allein die Convergenz dieser Reihen abhängt, nicht mehr ein Bruch ist, sondern die Einheit übertrifft, und zwar um so mehr, je größer der Bogen φ.

Da aber wenn $q = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ gegeben ist, eben dadurch auch $\frac{1}{q} = \mathfrak{q} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ bekannt ist, so setze man $\varphi = (2n+1)\pi - x$, wo n jede ganze positive Zahl vorstellt, und es ist sonach

$$\mathfrak{q} = \frac{\sin((2n+1)\pi - x)}{(2n+1)\pi - x} = \frac{\sin x}{(2n+1)\pi - x}$$

woraus nach gehöriger Umänderung hervorgeht:

$$\frac{(2n+1)\pi\,\mathfrak{q}}{1+\mathfrak{q}} = x - \frac{x^3}{1.2.3.(1+\mathfrak{q})} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.(1+\mathfrak{q})} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7.(1+\mathfrak{q})} + \ldots..$$

8. Aus dieser Reihe in (7) ergibt sich durch Umkehrung sogleich

$$x = \frac{(2n+1)\pi q}{1+q} + \frac{(2n+1)^3\pi^3 q^3}{2.3(1+q)^4} + \frac{(2-3q)(2n+1)^5\pi^5 q^5}{2.3.4.5.3(1+q)^7} + \ldots$$

oder

$$\varphi = (2n+1)\pi - \frac{(2n+1)\pi q}{1+q} - \frac{(2n+1)^3\pi^3 q^3}{2.3.(1+q)^4} -$$

$$\frac{(2-3q)(2n+1)^5\pi^5 q^5}{2.3.4.5.3(1+q)^7} - \ldots$$

$$= \frac{(2n+1)\pi}{1+q} - \frac{(2n+1)^3\pi^3 q^3}{2.3.(1+q)^4} - \frac{(2-3q)(2n+1)^5\pi^5 q^5}{2.3.4.5.3(1+q)^7} - \ldots$$

welcher Ausdruck für alle Bögen, die 126° überschreiten, oder sonst irgend ein Vielfaches des Halbkreises enthalten, um so anwendbarer ist, je größer sie sind.

9. Kennt man den gesuchten Bogen φ schon in so weit, daß er einem Bogen a nahezu gleich kommt und daß a und φ nur um einen sehr kleinen Bogen ε von einander verschieden seyn können, so setze man, um eine Nährungsformel zu erhalten, $\varphi = a + \varepsilon$, und man hat:

$$q = \frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{a+\varepsilon}{\sin(a+\varepsilon)} = \frac{a+\varepsilon}{\sin a \cos\varepsilon + \cos a \sin\varepsilon}$$

und weil ε nur ein sehr kleiner Bogen seyn soll, auch

$$q = \frac{a+\varepsilon}{\sin a + \varepsilon \cos a}, \text{ woraus}$$

$$\varepsilon = \frac{a - q\sin a}{q\cos a - 1}$$

und es ergibt sich für φ folgender Näherungswerth:

$$a + \frac{a - q\sin a}{q\cos a - 1} = \frac{q(a\cos a - \sin a)}{q\cos a - 1}.$$

10. Untersucht man den Ausdruck $q = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$ in Bezug auf ein Größtes und Kleinstes, so ergibt sich nach der bekannten Weise:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 0,$$ d. i.

$\sin\varphi - \varphi\cos\varphi = 0$, welches die Gleichung für die Ordinate der Kreisevolvente ist, wenn selbe $= 0$.

11. Ist nämlich (Fig. 1) der Kreis A L M A die Evolute und A N H P Q R die Evolvente, so ist A Q die Abscissenaxe und es findet sich für irgend einen Punkt N der Evolvente

die Abscisse $CS = x = a(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi)$

die Ordinate $NS = y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$

wobei der Halbmesser der Evolute $AC = a$ genommen worden. Vgl. Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, 2te Aufl. Berlin 1832. 3ter Band. 3ter Abschnitt.

12. Soll nun q ein Größtes oder Kleinstes seyn, so muß $\sin\varphi - \varphi\cos\varphi = 0$ oder $\varphi = \tan\varphi$ bestehen, was nach Euler (Introductio in Analys. Infinit. tom. II. cap. 22.) der Fall ist:

1) für $\varphi = 0^\circ$ wo $q = +1{,}0000000$
2) „ $\varphi = 257^\circ\ 27'\ 13''$ „ $q = -4{,}6021494$
3) „ $\varphi = 442^\circ\ 37'\ 28''$ „ $q = +7{,}7899072$

u. s. w.

Es hat mithin q bei jedem Umlaufe des Kreises sowohl ein positives als auch ein negatives Minimum, wovon ersteres einem Bogen $\varphi = 2n\pi + \chi$, letzteres aber einem Bogen $\varphi = (2n + 1)\pi + \chi$ angehört.

Hieraus erhellet nun auch, daß bloß für die positiven Werthe von q zwischen 1 und 7,7899072 nur je ein einziger Bogen φ gehören kann, welcher überdieß noch innerhalb des ersten Halbkreises liegen muß. Jedem andern Werthe von q aber, welcher keiner der angegebenen kleinsten Werthe ist, entspricht bei jedem Ablaufe des Kreises ein zweifacher Werth des Bogens φ, wovon jeder leicht aus der Reihe in (8) gefunden wird, indem man dem dortigen n für ein und dasselbe q

zweierlei zunächst entsprechende Werthe beilegt. Außerdem folgt aus dem Ausdrucke in (7) $q = \frac{\sin x}{(2n+1)\pi - x}$, daß nach wiederholten Kreisabläufen für ein und dasselbe q auch ein vielfacher Werth des Bogens φ sich ergeben kann.

Zweites Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seinem zuständigen Cosinus.

1. Aus der Reihe

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2\ldots6} + \frac{\varphi^8}{1.2\ldots8} - \frac{\varphi^{10}}{1.2\ldots10} + \ldots\ldots$$

findet man durch Umkehrung:

$$\varphi = \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,\Big[1 + \frac{1}{2^2.3}(1-\cos\varphi) + \frac{3^2}{2^3.3.4.5}(1-\cos\varphi)^2 + \frac{3^2.5^2}{2^4.3.4.5.6.7}(1-\cos\varphi)^3 + \ldots\ldots\Big]$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{3}{4.5}\sin^5\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{3.5\sin^7\tfrac{1}{2}\varphi}{4.6.7} + \frac{3.5.7\sin^9\tfrac{1}{2}\varphi}{4.6.8.9} + \frac{3.5.7.9\sin^{11}\tfrac{1}{2}\varphi}{4.6.8.10.11} + \ldots$$

2. Soll nun der Quotus $q = \frac{\varphi}{\cos\varphi} = \varphi\sec\varphi$ durch Funktionen von φ dargestellt werden, so ist:

$$q = \frac{\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2(1-\cos\varphi)}}{\cos\varphi}\,[1 + \frac{1}{2^2 . 3}(1-\cos\varphi)$$
$$+ \frac{3^2}{2^3 . 3 . 4 . 5}(1-\cos\varphi)^2 + \frac{3^2 . 5^2}{2^4 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}(1-\cos\varphi)^3 + \ldots]$$
$$= \frac{\cos\varphi}{1}\,[2\sin\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{3} + \frac{3\sin^5\frac{1}{2}\varphi}{4 . 5} + \frac{3 . 5 . \sin^7\frac{1}{2}\varphi}{4 . 6 . 7}$$
$$+ \frac{3 . 5 . 7\sin^9\frac{1}{2}\varphi}{4 . 6 . 8 . 9} + \frac{3 . 5 . 7 . 9 . \sin^{11}\frac{1}{2}\varphi}{4 . 6 . 8 . 10 . 11} + \ldots]$$

3. Sucht man aber den nämlichen Quotus durch den Bogen φ selbst ausgedrückt, so erhält man:

$$q = \frac{\varphi}{\cos\varphi} = \varphi \sec\varphi .$$
$$= \varphi + \frac{\varphi^3}{2} + \frac{5\varphi^5}{1 . 2 . 3 . 4} + \frac{61\varphi^7}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} + \frac{1385\varphi^9}{1 . 2 \ldots 8}$$
$$+ \frac{50521\varphi^{11}}{1 . 2 \ldots 10} + \frac{2702765\varphi^{13}}{1 . 2 \ldots\ldots 12} + \ldots .$$

oder auch

$$q = \varphi - \frac{\overset{2}{W}\varphi^3}{1 . 2} + \frac{\overset{4}{W}\varphi^5}{1 . 2 . 3 . 4} - \frac{\overset{6}{W}\varphi^7}{1 . 2 \ldots 6} + \frac{\overset{8}{W}\varphi^9}{1 . 2 \ldots 8}$$
$$- \frac{\overset{10}{W}\varphi^{11}}{1 . 2 \ldots 10} + \frac{\overset{12}{W}\varphi^{13}}{1 . 2 \ldots 12} - \ldots\ldots$$

wo $\overset{2}{W}, \overset{4}{W}, \overset{6}{W} \ldots$ die Sekanten-Coefficienten bezeichnen und zwar in der Allgemeinheit, wie solche Hr. Professor Schnürlein hergestellt hat.

4. Ist q bekannt, so ergibt sich aus dieser Reihe durch Umkehrung:

$$\varphi = q - \frac{q^3}{1 . 2} + \frac{13\,q^5}{1 . 2 . 3 . 4} - \frac{541\,q^7}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$$
$$+ \frac{47545\,q^9}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8} - \frac{6847501\,q^{11}}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10} + \ldots .$$

Weil aber diese Reihe bei größeren Winkeln, wo q der Einheit nahe kommt und sie übersteigt, nicht wohl zusammenlauft, so müßte man auf sie allein gestützt in solchen Fällen die Frage nach dem Bogen φ wieder gänzlich fahren lassen. Um diesem mißlichen Umstande auszuweichen, setze man:

$\varphi = \frac{\pi}{4} + x$, und man hat:

$$q = \frac{\frac{\pi}{4} + x}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{\frac{\pi}{4} + x}{(\cos x - \sin x)\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

woraus folgt:

$$q(\cos . x - \sin . x)\sqrt{\tfrac{1}{2}} = x + \frac{\pi}{4}$$

und nach einer wohl bekannten Substitution und Reduktion:

$$\frac{q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}}{1 + q\sqrt{\frac{1}{2}}} = x + \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}} . x}{1.2.(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})} - \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}} . x^3}{1.2.3(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})}$$
$$- \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}} . x^4}{1.2.3.4(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})} + \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}}\, x^5}{1.2.3.4.5(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})}$$
$$+ \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}}\, x^6}{1.2\ldots6(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})} - \ldots$$

6. Aus dieser Reihe geht nun durch Umkehrung hervor:

$$x = \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}}{1 + q\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{q\sqrt{\frac{1}{2}}\left(q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})^3}$$
$$+ \frac{q(2q + \sqrt{\frac{1}{2}})\left(q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)^3}{2.3(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})^5} + \frac{q(\sqrt{\frac{1}{2}} - 4q - 12q^2)\left(q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)^4}{2.3.4(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})^7}$$
$$+ \frac{q(-\sqrt{\frac{1}{2}} - 4q + 6q^2\sqrt{\frac{1}{2}} + 51q^3)\left(q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)^5}{2.3.4.5(1 + q\sqrt{\frac{1}{2}})^9} + \ldots\ldots$$

welche Reihe denn um so mehr convergirt, je größer q ist.

7. Ist z. B. $q = 1$, so findet man $\chi = - 0{,}04631313 = -$ arc. $2^\circ\ 39'\ 12{,}767''$ oder $\varphi = 0{,}73908493 =$ arc. $42^\circ\ 20'\ 47{,}233''$, welcher Bogen also seinem Cosinus gleich ist, was L. Euler in seiner Introd. in Anal. Infinit. tom. II. cap. 22. durch ein mühseliges Annäherungsverfahren oder vielmehr durch regula falsi, keineswegs aber auf einem allgemeinen Wege gefunden hat.

8. Geht der gesuchte Bogen φ über den ersten Quadranten hinaus, oder ist er überhaupt irgend ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so setze man $\varphi = (2\,n + 1)\,\frac{\pi}{2} + \chi$, und es ist

$$q = \frac{(2\,n+1)\,\frac{\pi}{2} + \chi}{\cos\left((2\,n+1)\,\frac{\pi}{2} + \chi\right)} = \frac{(2\,n+1)\,\frac{\pi}{2} + \chi}{-\sin\chi},$$

und sonach

$$-\,q\,\sin\chi - \chi = (2\,n+1)\,\frac{\pi}{2}.$$

Wird hier für $\sin\chi$ die bekannte Reihe gesetzt und darnach gehörig reducirt, so ist:

$$-\,\frac{(2\,n+1)\,\pi}{2\,(q+1)} = \chi - \frac{q\,\chi^3}{2.3\,(q+1)} + \frac{q\,\chi^5}{2.3.4.5\,(q+1)} - \frac{q\,\chi^7}{2.3.4.5.6.7\,(q+1)} + \ldots$$

und durch Umkehrung

$$\chi = -\,\frac{(2\,n+1)}{2\,(q+1)} - \frac{q\,(2\,n+1)^3\,\pi^3}{2.3.2^3\,(q+1)^4} - \frac{q\,(9\,q-1)\,(2\,n+1)^5\,\pi^5}{2.3.4.5.2^5\,(q+1)^7} - \frac{q\,(1625\,q^2 - 54\,q + 1)\,(2\,n+1)^7\,\pi^7}{2.3.4.5.6.7.2^7\,(q+1)^{10}} - \ldots$$

9. Diese Reihe lauft um so schneller zusammen, je größer q ist. Setzt man in ihr $n = 0$ und $-\chi$ statt $+\chi$, so

geht sie für Winkel und Bogen im ersten Quadranten in folgende über:

$$x = \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{q\,\pi^3}{2.3.2^3\,(q+1)^4} + \frac{q\,(9\,q-1)\,\pi^5}{2.3.4.5\,2^5\,(q+1)^7}$$
$$+ \frac{q\,(1625\,q^2 - 54\,q + 1)\,\pi^7}{2.3.4.5.6.7.\,2^7\,(q+1)^{10}} + \ldots\ldots$$

mithin auch

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2(q+1)} - \frac{q\,\pi^3}{2.3.2^3\,(q+1)^4} - \frac{q\,(9\,q-1)\,\pi^5}{2.3.45.2^5\,(q+1)^7}$$
$$- \frac{q\,(1625\,q^2 - 549 + 1)\,\pi^7}{2.3.4.5.6.2^7.(q+1)^{10}} - \ldots.$$

10. Kennt man den gesuchten Bogen φ schon im Voraus so weit, daß er von einem andern a nur um den sehr kleinen Bogen $\mathfrak{E}$ abweichen kann, so ist, um eine brauchbare Annäherungsformel zu erhalten,

$$q = \frac{\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a + \mathfrak{E}}{\cos(a + \mathfrak{E})} = \frac{a + \mathfrak{E}}{\cos a \cos \mathfrak{E} - \sin a \sin \mathfrak{E}}$$

und weil $\mathfrak{E}$ sehr klein seyn soll, auch

$$q = \frac{a + \mathfrak{E}}{\cos a - \mathfrak{E} \sin a}, \text{ woraus denn sich ergibt,}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{a\,(q-1)}{1 + q \sin a}$$

11. Da $q = \frac{\varphi}{\cos\varphi}$ eine Funktion von zwei zugleich veränderlichen Größen ist, wovon die eine abnimmt, während die andere zunimmt, so muß q auch die Eigenschaft, ein Kleinstes und Größtes seyn zu können, besitzen. Durch Differentiation wird zu diesem Endzwecke gefunden:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{\cos\varphi + \varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0$$

woraus folgt:

$\varphi = -\cot\varphi$, d. i. der geometrische Ort der Kreisevol-

vente, wo ihre Abscisse = o, welches nach Kap. 4 §. 13 bei einem Bogen $\varphi = 160^\circ\ 20'\ 8,7''$ statt hat und wobei $q = -2{,}9716934$ gefunden wird. Da für einen Bogen $\varphi = 90^\circ$ $q = +\infty$, für einen Bogen $\varphi = 180^\circ$ aber $q = -\infty$, so liegen die positiven Werthe von q alle zwischen o und ∞, die negativen aber zwischen $-2{,}9716934$ und $-\infty$.

12. Daraus ist auch abzunehmen, wie die Werthe von q für Bögen des ersten Quadranten innerhalb o und ∞, für Bögen des zweiten und dritten Quadranten aber zwischen $-\infty$ und $-2{,}9716934$, und für Bögen des vierten Quadranten innerhalb ∞ und 2π eingeschränkt sind, und daß ähnliche Schranken auch für Bögen anderer Quadranten statt finden. Zugleich folgt aber auch, daß bei jedem Ablaufe des ganzen Kreises jedem Werthe von q innerhalb der angegebenen Schranken ein doppelter Werth des Bogens φ entspreche, von denen der eine wie der andere aus der in (9) für x hergestellten Reihe leicht dadurch sich ergibt, daß man für ein und dasselbe q dem dortigen n zweierlei sich zunächst folgende Werthe beilegt.

Drittes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seiner zuständigen Tangente.

1. Wenn bekannt ist, wie Tangente und Bogen eines Winkels nach irgend einem Maße sich zu einander verhalten, und man will dieses Verhältniß durch die Tangente darstellen, so ist:

$$q = \frac{\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} = 1 - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^2\varphi + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^4\varphi - \frac{1}{7}\operatorname{tang}^6\varphi + \frac{1}{9}\operatorname{tang}^8\varphi - \frac{1}{11}\operatorname{tang}^{10}\varphi + \ldots$$

2. Soll aber q geradezu durch den Bogen φ selbst dargestellt werden, so hat man auch:

$$q = \frac{\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} = \varphi\cot\varphi = 1 - \frac{2^2 . \overset{1}{B}\,\varphi^2}{1.2} - \frac{2^4 . \overset{2}{B}\,\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{2^6 . \overset{3}{B}\,\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} - \frac{2^8 . \overset{4}{B}\,\varphi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \ldots.$$

3. Nun übriget noch, wenn die Verhältnißzahl q bekannt ist, daraus den zugehörigen Winkel aufzufinden. Zu diesem Ende setze man:

$q = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varphi}$ und $\varphi = 2x$, so ist

$$q = \frac{\operatorname{tang} 2x}{2x} = \frac{\operatorname{tang} x}{x(1 - \operatorname{tang}^2 x)}.$$

4. Wird hier anstatt x die wohl bekannte Reihe gesetzt, welche den Bogen durch seine Tangente darstellt, so erhält man nach einer kurzen und leichten Reduktion:

$$\frac{3(q-1)}{4q} = \tang^2 x - \frac{2}{5}\tang^4 x + \frac{9}{35}\tang^6 x - \frac{4}{21}\tang^8 x$$

$$+ \frac{5}{33}\tang^{10} x - \frac{18}{143}\tang^{12} x + \frac{7}{65}\tang^{14} x - \ldots .$$

$$\pm \frac{3n}{4n^2 - 1}\tang^{2n} . x \mp \ldots .$$

wo n die Ordnungszahl des Gliedes, das Anfangsglied eingerechnet, bezeichnet.

5. Kehrt man diese vorstehende Reihe um, so findet sich:

$$\tang x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(q-1)}{q}}\left[1 + \frac{1}{5}.\frac{3(q-1)}{4q} + \frac{2}{5^2.7}.\frac{3^2.(q-1)^2}{4^2.q^2}\right.$$

$$\left.- \frac{11.3^3.(q-1)^3}{3.5^3.7.4^3.q^3} - \frac{2.3^4.(q-1)^4}{5^3.7^2.11.4^4.q^4} + \frac{15338.3^5.(q-1)^5}{3.5^5.7^2.11.13.4^5.q^5} + \ldots\ldots\right]$$

welche Reihe immer convergirt, so lange $\frac{q-1}{q} < 1$ und positiv ist; im entgegengesetzten Falle wird sie aber leicht divergirend oder gar imaginär und ist für $q = 1$ gänzlich unbrauchbar; allgemein anwendbar ist sie daher nur für Winkel im ersten Quadranten.

6. Wenn $\frac{q-1}{q} = 0$, oder > 1, oder negativ ist, alsdann enthält der gesuchte Bogen φ irgend ein Vielfaches des Quadranten oder von $\frac{\pi}{2}$. Man setze deßhalb, um diesen Bogen zu finden, $\varphi = \frac{(2n+1)\pi}{2} - s$, und es ist:

$$q = \frac{\varphi}{\tang \varphi} = \frac{\frac{(2n+1)\pi}{2} - s}{\tang\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} - s\right)} = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - s}{\cot s}$$

woraus folgt:

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} = q \cot s + s = \frac{q}{\tang s} + s$$

7. Wird nun der Bogen s durch seine Tangente ausgedrückt, so hat man:

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{q}{\tan s} + \tan s - \tfrac{1}{3}\tan^3 s + \tfrac{1}{5}\tan^5 s - \tfrac{1}{7}\tan^7 s + \tfrac{1}{9}\tan^9 s - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\tan s = \frac{2q}{(2n+1)\pi} + \frac{8q^2}{(2n+1)^3\pi^3} + \frac{(6-q)\,2^5 . q^3}{3.(2n+1)^5\pi^5} + \frac{(45q^3 - 614q^2 - 2940q + 4410)\,2^9 . q^5}{315 . (2n+1)^9 . \pi^9} + \ldots$$

eine Reihe, die immer convergirt, so lange $q < \pm \pi$.

8. Ist aber $q > \pm \pi$, dann ermangelt auch die vorstehende Reihe für $\tan s$ in (7) aller Convergenz. Man setze deßwegen in diesem Falle $\varphi = n\pi + s$ und $q = \frac{n\pi + s}{\tan .(n\pi + s)} = \frac{n\pi + s}{\tan s}$, woraus hervorgeht:

$$q \tan s = n\pi + s, \text{ und}$$
$$n\pi = q \tan s - s.$$

9. Wird nun der Bogen s durch seine Tangente ausgedrückt, und die ganze Gleichung gehörig vereinfacht, so erhält man:

$$\frac{n\pi}{q-1} = \tan s - \frac{\tan^3 s}{3(q-1)} + \frac{\tan^5 s}{5(q-1)} - \frac{\tan^7 s}{7(q-1)} + \frac{\tan^9 s}{9(q-1)} - \frac{\tan^{11} s}{11(q-1)} + \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\tan s = \frac{n\pi}{q-1} + \frac{n^3\pi^3}{3(q-1)^4} + \frac{(8-3q)\,n^5\pi^5}{3.5.(q-1)^7} + \frac{5.9.(q-1)^2 - 2.3.4.7(q-1) + 4.5.7}{3^2.5.7.(q-1)^{10}} . n^7\pi^7 + \ldots$$

Auch diese Reihe hat aber nur eine sehr beschränkte

Brauchbarkeit, nämlich nur für solche Winkel, wo $\frac{n\pi}{q-1}$ ein ächter, positiver oder negativer Bruch ist; insbesondere convergirt diese Reihe am besten, wenn q einen etwas großen, aber negativen Werth hat.

10. Nimmt man nun ferner noch $\varphi = (1+4n)\frac{\pi}{4} + s$, so ist

$$q = \frac{(1+4n)\frac{\pi}{4} + s}{\operatorname{tang}\left((1+4n)\frac{\pi}{4} + s\right)} = \frac{(1+4n)\frac{\pi}{4} + s}{\frac{\operatorname{tang}(1+4n)\frac{\pi}{4} + \operatorname{tang} s}{1 - \operatorname{tang}(1+4n)\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tang} s}}$$

$$= \frac{(1+4n)\frac{\pi}{4} + s}{\frac{1+\operatorname{tang} s}{1-\operatorname{tang} s}}$$

welcher Ausdruck nach einer kurzen Reduktion in folgende Reihe übergeht:

$$\frac{(1+4n)\frac{\pi}{4} - q}{(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1} = \operatorname{tang} s + \frac{\operatorname{tang}^2 s}{(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1}$$

$$+ \frac{\operatorname{tang}^3 s}{3\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]} - \frac{\operatorname{tang}^4 s}{3\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]}$$

$$- \frac{\operatorname{tang}^5 s}{5\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]} + \frac{\operatorname{tang}^6 s}{5\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]}$$

$$+ \frac{\operatorname{tang}^7 s}{7\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]} - \frac{\operatorname{tang}^8 s}{7\left[(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1\right]} - \ldots$$

oder wenn man $(1+4n)\frac{\pi}{4} - q = b$, und $(1+4n)\frac{\pi}{4} + q - 1 = c$ setzt, $\frac{b}{c} = \text{tang}\, s + \frac{\text{tang}\, s}{c} + \frac{\text{tang}^3 s}{3c} - \frac{\text{tang}^4 s}{3c} - \frac{\text{tang}^5 s}{5c}$

$$+ \frac{\text{tang}^6 s}{5c} + \frac{\text{tang}^7 s}{7c} - \frac{\text{tang}^8 s}{7c} - \ldots$$

11. Kehrt man diese vorstehende Reihe um, so ergibt sich:

$$\text{tang}\, s = \frac{b}{c} - \frac{b^2}{c \cdot c^2} + \frac{6-c}{3c^2} \cdot \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^2+5c-15}{3c^3} \cdot \frac{b^4}{c^4} + \ldots$$

Da $\frac{b}{c}$ ein um so kleinerer Bruch ist, je größer q, so wird auch diese Reihe um so mehr convergiren, je größer q ist.

12. Indeß können doch noch Fälle eintreten, wo durch die bisher in 5, 7, 9, 11. aufgestellten Reihen eine Lösung der vorliegenden Aufgabe so leicht nicht erzielt werden kann, weil keine derselben allgemeine Brauchbarkeit besitzt. Es bedeute aber a einen Bogen, der von dem gesuchten φ so wenig als möglich abweicht und der durch die vorhin behandelten Reihen gefunden werden kann, und μ einen andern kleineren Bogen, welcher dem Unterschiede zwischen a und φ gleich kommt, so hat man der Aufgabe gemäß:

$$q = \frac{a+\mu}{\text{tang}\,(a+\mu)} = \frac{(a+\mu)\,(1 - \text{tang}\, a\, \text{tang}\, \mu)}{\text{tang}\, a + \text{tang}\, \mu}$$

Wird in diesem Ausdrucke der Bogen μ durch seine Tangente gegeben, so geht derselbe nach gehöriger Reduktion in folgenden über:

$$\frac{q\, \text{tang}\, a - a}{1 - a\, \text{tang}\, a - q} = \text{tang}\, \mu - \frac{\text{tang}\, a\, \text{tang}^2 \mu}{1 - a\, \text{tang}\, a - q}$$

$$- \frac{\text{tang}^3 \mu}{3\,(1 - a\, \text{tang}\, a - q)} + \ldots$$

woraus durch Umkehrung entsteht:

$$\tang \mu = \frac{q \tang a - a}{1 - a \tang a - q} + \frac{\tang a (q \tang a - a)^2}{(1 - a \tang a - q)^3}$$

$$+ \frac{(1 - a \tang a + 6 \tang^2 a - q)(q \tang a - a)}{3 (1 - a \tang a - q)^5} + \ldots$$

Wird dann der so gefundene Bogen μ zu a hinzugezählt und diese Summe wieder einem a gleich gesetzt, so kann man sich dieser Reihe wiederholt zur genaueren Näherung des gesuchten Bogens φ bedienen, wodurch sie erst allgemeine Brauchbarkeit gewinnt.

13. Setzt man z. B. $q = \frac{1}{2}$, so findet sich durch die Reihe in (5)

$\varphi = 66^\circ\ 46'\ 54,\ 5''$; und

für $q = 1$, aus der Reihe in (7), indem man zugleich das dortige $n = 1$ seyn läßt, $\tang s = 0{,}22254433 = \tang 12^\circ\ 32'\ 47''$, und mithin $\varphi = 257^\circ\ 27'\ 13''$, welcher Bogen also bei dem ersten Ablaufe des Kreises seiner Tangente gleich ist;

nimmt man $q = -1$, so ergibt sich ebenfalls aus (7) $\varphi = 116^\circ\ 14'\ 21{,}3''$;

für $q = +\pi$, wird aus (7) und (12) gefunden $\varphi = 232^\circ 13' 11''$

„ $q = -\pi$ „ „ „ „ $\varphi = 141^\circ 52' 22''$.

14. Um zu untersuchen, in welchen Fällen $q = \frac{\varphi}{\tang \varphi} = \varphi \cot \varphi$ ein Größtes oder Kleinstes sei, setze man $\varphi = n\pi + \chi$, also

$q = \frac{n\pi + \chi}{\tang (n\pi + \chi)} = \frac{n\pi + \chi}{\tang \chi}$, wobei n jede ganze positive Zahl vorstellt, wonach durch Differentiation sich ergibt:

$$\frac{dq}{d\varphi} = \tang \chi - (n\pi + \chi)\frac{1}{\cos^2 \chi} = o, \text{ oder}$$

$$\sin \chi \cos \chi = n\pi + \chi.$$

Da dieser Ausdruck nun keine Zweideutigkeit zuläßt, und immer statt hat, so oft $x = - n \pi$, also $\sin x \cdot \cos x = 0$, so ist folglich q ein Größtes:

a) für $\varphi = 0$, wobei $q = 1$

b) „ $\varphi = \pi$ „ $q = \infty$

c) „ $\varphi = 2\pi$ „ $q = \infty$

d) „ $\varphi = 3\pi$ „ $q = \infty$

„ $\varphi = n\pi$ „ $q = \infty$.

Viertes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seiner zuständigen Cotangente.

1. Wenn man weiß, das Wievielfache die Cotangente von ihrem Bogen ist, und es ist die Frage nach der Größe des zuständigen Winkels, so besteht zwischen der Verhältnißzahl $q = \frac{\varphi}{\cot \varphi}$ und dem Bogen φ folgende Beziehung:

$$q = \tang \varphi \left(\tang \varphi - \tfrac{1}{3} \tang^3 \varphi + \tfrac{1}{5} \tang^5 \varphi - \tfrac{1}{7} \tang^7 \varphi + \ldots\right)$$

oder auch

$$q = \varphi \left(\frac{2 \cdot (4 - 1) \overset{1}{B} \cdot 2 \cdot \varphi}{1 \cdot 2} + \frac{2 \cdot (4^2 - 1) \overset{2}{B} \cdot 2^3 \cdot \varphi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot (4^3 - 1) \overset{3}{B} \cdot 2^5 \cdot \varphi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{2 \cdot (4^4 - 1) \overset{4}{B} \cdot 2^7 \cdot \varphi^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots \right)$$

2. Um nun aus dieser Verhältnißzahl $q = \frac{\varphi}{\cot \varphi}$ oder

$q = \frac{\cot \varphi}{\varphi}$ den zuständigen Bogen zu finden, setze man $\varphi = 2\,x$, wornach:

$$q = \frac{1 - \tan^2 x}{4\,x \tan x}, \text{ und}$$

$$1 = \tan^2 x + 4\,q\,x \tan x.$$

Substituirt man hier statt x die Reihe, welche den Bogen durch seine Tangente darstellt, so erhält man nach einer kurzen Reduktion:

$$\frac{1}{1 + 4\,q} = \tan^2 x - \frac{4\,q \tan^4 x}{3\,(1 + 4\,q)} + \frac{4\,q \tan^6 x}{5\,(1 + 4\,q)} - \frac{4\,q \tan^8 x}{7\,(1 + q\,4)} + \ldots$$

welche Reihe durch Umkehrung gibt:

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,q}} \left[1 + \frac{2\,q}{3\,(1 + 4\,q)^2} - \frac{4\,q\,(9 + q)}{2\,.\,5\,.\,9\,(1 + 4\,q)^4} + \frac{4\,q\,(45 - 18\,q - 22\,q^2)}{2\,.\,3^2\,.\,5\,.\,7\,(1 + 4\,q)^6} - \frac{4\,q\,(1575 - 2187\,q - 3006\,q^2 - 1357\,q^3)}{2\,.\,3^4\,.\,5^2\,.\,7\,(1 + 4\,q)^8} + \ldots\right]$$

3. Eine andere ebenfalls sehr brauchbare Reihe erhält man auch auf folgende Art:

man setze wie oben (1) $q = \frac{\cot \varphi}{\varphi}$ und zugleich $\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\,\psi$, woraus folgt $\cot \varphi = \tan 2\,\psi$ und aus demselben Grunde:

$$q = \frac{\tan 2\,\psi}{\frac{\pi}{2} - 2\,\psi}, \text{ und durch Versetzung:}$$

$$\frac{\pi\,q}{2} = 2\,q\,\psi + \tan 2\,\psi.$$

Setzt man hier anstatt $\tan 2\,\psi$ jene wohl bekannte

Reihe, welche die Tangente durch ihren Bogen darstellt, so geht der ganze Ausdruck in folgenden über:

$$\frac{\pi q}{2} = 2 q \psi + 2 \psi + \frac{2^3 . \psi^3}{3} + \frac{2 . 2^5 \psi^5}{3 . 5} + \frac{17 . 2^7 . \psi^7}{3^2 . 5 . 7}$$
$$+ \frac{62 . 2^9 \psi^9}{3^4 . 5 . 7} + \ldots .$$

und durch Reduktion

$$\frac{\pi q}{4(q+1)} = \psi + \frac{2^2 . \psi^3}{3(q+1)} + \frac{2^5 . \psi^5}{3 . 5 . (q+1)} + \frac{17 . 2^6 . \psi^7}{3^2 . 5 . 7 (q+1)}$$
$$+ \frac{62 . 2^8 . \psi^9}{3^4 . 5 . 7 (q+1)} + \ldots .$$

woraus durch Umkehrung wird:

$$\psi = \frac{\pi q}{4(q+1)} - \frac{\pi^3 q^3}{3 . 4^2 . (q+1)^4} + \frac{(144 - 96 q) \pi^5 q^5}{4^5 . 5 . 9 (q+1)^7}$$
$$- \frac{(1088 (q+1)^2 - 7 . 1024 (q+1) + 5 . 7 . 256) \pi^7 q^7}{4^7 . 5 . 7 . 9 (q+1)^{10}} + \ldots$$

4. Beide Reihen, die in (2) wie die in (3) convergiren in den meisten Fällen schnell genug, der gesuchte Bogen φ mag groß oder klein seyn.

5. Noch übriget, die Aufgabe auch für den Fall zu lösen, wenn φ irgend ein Vielfaches des Quadranten enthält. Es sei alsdann $\varphi = (2 n + 1) \frac{\pi}{2} - s$ und also

$$q = \frac{\varphi}{\cot \varphi} = \frac{(2 n + 1) \frac{\pi}{2} - s}{\cot \left((2 n + 1) \frac{\pi}{2} - s\right)} = \frac{(2 n + 1) \frac{\pi}{2} - s}{\operatorname{tang} s}$$

woraus zwischen q und s folgende Relation sich ergibt:

$$(2 n + 1) \frac{\pi}{2} = s + q \operatorname{tang} s$$
$$= q \operatorname{tang} s + \operatorname{tang} s - \frac{\operatorname{tang}^3 s}{3} + \frac{\operatorname{tang}^5 s}{5}$$
$$- \frac{\operatorname{tang}^7 s}{7} + \ldots$$

und wenn man tang s von seinem Coefficienten befreit:

$$\frac{2(n+1)\pi}{2(q+1)} = \text{tang}\, s - \frac{\text{tang}^3 s}{3(q+1)} + \frac{\text{tang}^5 s}{5(q+1)} - \frac{\text{tang}^7 s}{7(q+1)} + \ldots$$

woraus man durch Umkehrung erhält:

$$\text{tang}\, s = \frac{(2n+1)\pi}{2(q+1)} + \frac{(2n+1)^3 \pi^3}{2^3 . 3 . (q+1)^4} - \frac{(3q-2)(2n+1)^5 \pi^5}{2^5 . 3 . 5 (q+1)^7}$$

$$+ \frac{(45 q^2 - 78 q + 17)(2n+1)^7 \pi^7}{2^7 . 5 . 7 . 9 (q+1)^{10}} + \ldots$$

6. Für $n = 0$ ist

$$\text{tang}\, s = \frac{\pi}{2(q+1)} + \frac{\pi^3}{2^3 . 3 (q+1)^4} - \frac{(3q-2)\pi^5}{2^5 . 3 . 5 (q+1)^7}$$

$$+ \frac{(45 q^2 - 78 q + 17)\pi^7}{2^7 . 5 . 7 . 9 (q+1)^{10}} + \ldots .$$

welche Reihe um so schneller convergirt, je kleiner der Bogen s ist, oder je näher der gesuchte Bogen $\varphi = \frac{\pi}{2} - s$ dem Quadranten $\frac{\pi}{2}$ kommt.

7. Sie hört aber auf zu convergiren, wenn q ein Bruch ist. Derselbe Fall kann auch seyn bei der in (5) für tang s hergestellten Reihe, wenn n eine etwas große Zahl ist, und also $\frac{2n+1}{2(q+1)}$ kein ächter Bruch mehr ist. Um aber dennoch die Aufgabe lösen zu können, wird es am zweckdienlichsteu seyn, den gesuchten Bogen φ von einem Bruche abhängig zu machen, dessen Nenner n oder ein Prodrkt von n ist. Man setze deßhalb:

$$q = \frac{\varphi}{\cot\varphi} = \frac{n\pi + \mu}{\cot(n\pi+\mu)} = \frac{n\pi+\mu}{\cot\mu} = n\pi\,\text{tang}\,\mu + \mu\,\text{tang}\,\mu$$

$$= n\pi\,\text{tang}\,\mu + \text{tang}\,\mu\left(\text{tang}\,\mu - \frac{\text{tang}^3\mu}{3} + \frac{\text{tang}^5\mu}{5} - \frac{\text{tang}^7\mu}{7} + \ldots\right)$$

$$= n\pi\,\text{tang}\,\mu + \text{tang}^2\mu - \frac{\text{tang}^4\mu}{3} + \frac{\text{tang}^6\mu}{5} - \frac{\text{tang}^8\mu}{7} + \ldots$$

8. Obschon diese Reihe nicht gleichmäßig nach den Potenzen von tang μ fortschreitet, indem der Exponent von tang μ vom ersten bis zum zweiten Gliede um 1, vom zweiten aber bis zum dritten u. s. f. um 2 steigt, so hindert uns doch nichts, dieselbe als gleichmäßig nach den Potenzen von tang μ fortschreitend anzunehmen, dabei aber die Coefficienten der fehlenden Glieder $\tang^3 \mu$, $\tang^5 \mu$, $\tang^7 \mu$ u. s. w. $= 0$ zu setzen. Auf diese Weise erhält man durch Umkehrung:

$$\tang \mu = \frac{q}{n\pi} - \frac{q^2}{n^3\pi^3} + \frac{2q^3}{n^5\pi^5} + \frac{(n^2\pi^2+15)q^4}{3n^7\pi^7} - \frac{2(n^2\pi^2-7)q^5}{n^9\pi^9}$$

$$- \frac{(3.4n^4\pi^4 - 2.5.7n^2\pi^2 + 4.7.9.10)q^6}{3.4.5.n^{11}.\pi^{11}} + \ldots$$

welche Reihe um so mehr convergirt, je größer n ist.

9. Um eine Annäherungsformel herzustellen, bezeichne a einen Bogen, der dem gesuchten φ so nahe als möglich gleich kommt, und ε einen andern sehr kleinen Bogen, welcher zu a hinzugefügt selben dem φ noch näher bringt, und es ist

$$\frac{\cot(a+\varepsilon)}{a+\varepsilon} = \frac{1 - \tang a \tang \varepsilon}{(a+\varepsilon)(\tang a + \tang \varepsilon)} = q$$

oder wegen Kleinheit des Winkels ε

$$q = \frac{1 - \tang a \tang \varepsilon}{(a + \tang \varepsilon)(\tang a + \tang \varepsilon)}$$

woraus, wenn man $\tang^2 \varepsilon$ vernachlässiget, indem es nur ein sehr kleiner Bruch seyn soll, leicht abgeleitet wird

$$\tang \varepsilon = \frac{1 - a q \tang a}{q \tang a + a q + \tang a}$$

10. Für $q = 1$ und $a = 49^0\ 17'\ 36''$ findet man $\tang \varepsilon = 0{,}00000257 = \tang 0^0\ 0'\ 0{,}53''$, woraus erhellet, daß der Bogen von $49^0\ 17'\ 36{,}\ 53''$ seiner Cotangente gleich ist.

Ist $q = -1$, so findet man durch die Reihe in (8) und die oben stehende Näherungsformel $\varphi = 160^0\ 20'\ 8{,}\ 7''$,

welcher Bogen also seiner negativen Cotangente oder auch der Tangente von 70° 20′ 8,7″ gleich kommt.

11. Noch übriget, den Ausdruck $q = \frac{\varphi}{\cot\varphi} = \varphi \tang \varphi$ in Bezug auf sein Größtes oder Kleinstes zu untersuchen. Indem aber derselbe ein Produkt von zwei Faktoren ist, von denen der eine alle Werthe zwischen $-\frac{1}{\infty}$ und $+\infty$ annehmen kann, so ist auch q zugleich mit tang φ ein Größtes oder Kleinstes.

Fünftes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seiner zuständigen Sekante.

1. Wenn $q = \frac{\varphi}{\sec\varphi} = \varphi \cos\varphi$ ist, und man setzt für cos φ die bekannte Reihe, so ergibt sich alsbald:

$$q=\varphi-\frac{\varphi^3}{1.2}+\frac{\varphi^5}{1.2.3.4}-\frac{\varphi^7}{1.2...6}+\frac{\varphi^9}{1.2...8}-\frac{\varphi^{11}}{1.2...10}+\ldots$$

woraus durch Umkehrung wird:

$$\varphi = q + \frac{q^3}{1.2} + \frac{17\,q^5}{1.2.3.4} + \frac{961\,q^7}{1.2....6} + \frac{116129\,q^9}{1.2.....8} + \frac{24419521\,q^{11}}{1.2.....10} + \ldots$$

2. Diese Reihe lauft hinlänglich zusammen, sowohl für kleine als für große Winkel; doch muß sie nothwendig am wenigsten convergiren, wenn q seinen größten Werth erreicht.

Wann dieses der Fall sei, erfährt man durch Untersuchung des Ausdruckes $q = \varphi \cos \varphi$ in Bezug auf sein Größtes und Kleinstes. Man erhält auf diesem Wege

$$\frac{dq}{d\varphi} = \cos\varphi - \varphi \sin\varphi = 0, \text{ woraus folgt } \varphi = \cot\varphi,$$

was nach (10) des vorausgehenden Kap. 4 beweiset, daß für einen Bogen $\varphi = 49^\circ\ 17'\ 36{,}53''$ $q = \frac{\varphi}{\sec\varphi}$ ein Größtes sei, und also die in (1) für φ hergestellte Reihe am wenigsten convergirt, wenn $q = 0{,}5610965$, obschon sie auch dann nicht gänzlich aufhört zu convergiren.

3. Weil aber $q = \varphi \cos \varphi$ ein Produkt ist aus den Faktoren φ und $\cos \varphi$, von denen, wenigstens im ersten Quadranten, der eine wächst, während der andere abnimmt, so erhellet, daß für jeden Werth von q zwischen 0 und 0,5610965 der gesuchte Bogen φ zweierlei Werthe annehmen könne, wovon der eine durch die in (1) entwickelte Reihe dargestellt wird, der andere aber noch zu suchen ist, und wovon wieder der eine größer, der andere kleiner als $49^\circ\ 17'\ 36,\ 53''$ ist.

4. Es werde, um diesen zu finden, der Bogen von $49^\circ\ 17'\ 36,\ 53''$ durch a bezeichnet, so kann der kleinere Werth von φ durch $a - x$, der größere aber durch $a + y$ dargestellt werden, und man hat zugleich folgende zwei Gleichungen:

I. $q = (a - x) \cos (a - x)$

II. $q = (a + y) \cos (a + y)$.

5. Die erste Gleichung geht nach einer leichten Entwickelung zuerst in folgende über:

$$q \sec a = a \cos x + \sin x - x \cos x - \frac{x \sin x}{a}$$

Werden hier statt cos x und sin x die entsprechenden Reihen gesetzt, so ergibt sich weiters folgende Reihe:

$$q \sec a = a - \frac{x^2(a^2+2)}{1.2\,a} + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{x^4(a^2+4)}{1.2.3.4\,a} - \frac{4x^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- \frac{x^6(a^2+6)}{1.2.3.4.5.6\,a} + \frac{6x^7}{1.2\ldots7} + \frac{x^8(a^2+8)}{1.2\ldots8\,a} - \ldots$$

6. Ebenso geht die zweite Gleichung zuerst über in

$$q \sec a = a \cos y - \sin y + y \cos y - \frac{y \sin y}{a}$$

und durch die nämliche Substitution wie in (5) in folgende Reihe:

$$q \sec a = a - \frac{y^2(a^2+2)}{1.2\,a} - \frac{2y^3}{1.2.3} + \frac{y^4(a^2+4)}{1.2.3.4\,a} + \frac{4y^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- \frac{y^6(a^2+6)}{1.2.3.4.5.6\,a} - \frac{6y^7}{1.2\ldots7} + \ldots$$

7. Durch Gegeneinanderhalten der in (5) und (6) für q sec a aufgestellten Reihen ergibt sich nun zwischen x und y folgende Beziehung:

$$\frac{x^2(a^2+2)}{1.2\,a} - \frac{2x^3}{1.2.3} - \frac{x^4(a^2+4)}{1.2.3.4.a} + \frac{4x^5}{1.2\ldots5} + \frac{x^6(a+6)}{1.2\ldots6.a} - \ldots$$
$$= \frac{y^2(a^2+2)}{1.2.a} + \frac{2y^3}{1.2.3} - \frac{y^4(a^2+4)}{1.2.3.4.a} - \frac{4y^5}{1.2..5} + \frac{y^6(a^2+6)}{1.2\ldots6.a} + \ldots$$

8. Um y zu finden, wenn x gegeben ist, muß y zuerst durch eine von x abhängige Reihe dargestellt werden, welche vorläufig fingirt folgende ist:

$$y = A x + B x^2 + C x^3 + D x^4 + E x^5 + \ldots$$

Es ist also y^2, y^3, y^4, y^5 u. s. w. durch diese Reihe auszudrücken und in die Reihe (7) rechts vom Gleichheitszeichen zu substituiren. Nun ist:

$$y^2 = A^2 x^2 + 2AB x^3 + B^2 x^4 + 2BC x^5 + C^2 x^6 + \ldots$$
$$+ 2AC x^4 + 2AD x^5 + 2BD x^6 + \ldots$$
$$+ 2AE x^6 + \ldots$$
$$y^3 = A^3 x^3 + 3A^2B x^4 + 3A^2C x^5 + 3A^2D x^6 + \ldots$$
$$+ 3AB^2 x^5 + 6ABC x^6 + \ldots$$
$$+ B^3 x^6 + \ldots$$

$$y^4 = A^4 x^4 + 4 A^3 B x^5 + 4 A^3 C x^6 + \ldots$$
$$+ 6 A^2 B^2 x^6 + \ldots$$
$$y^5 = A^5 x^5 + 5 A^4 B x^6 + \ldots$$
$$y^6 = A^6 x^6 + \ldots$$

Wird die Reihe (7) auf o gebracht und die angezeigte Substitution vollzogen, so ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen zur Auffindung der angenommenen Coefficienten:

$$\frac{(a^2+2)}{1.2} - \frac{(a^2+2)\,A}{1.2} = o$$

$$-\frac{2}{1.2.3} - \frac{2\,AB\,(a^2+2)}{1.2.\,a} - \frac{2\,A^3}{1.2.3} = o$$

$$-\frac{(a^2+4)}{1.2.3.4.a} - \frac{(a^2+2)}{1.2\,a}(B^2+2\,AC) - \frac{2.3\,A^2 B}{1.2.3} + \frac{(a^2+4)A^4}{1.2.3.4.a} = o$$

$$\frac{4}{1.2\ldots5} - \frac{2\,(a^2+2)}{1.2.a}(BC+AD) - \frac{2.3\,(A^2C+AB^2)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{4\,(a^2+4)}{1.2.3.4.a} A^3 B + \frac{4\,A^5}{1.2\ldots5} = o$$

$$\frac{(a^2+6)}{1.2\ldots6.a} - \frac{(a^2+2)}{1.2.a}(C^2+2\,BD+2\,AE) - \frac{2\,(3A^2D+6ABC+B^3)}{1.2.3}$$
$$+ \frac{(a^2+4)}{1.2.3.4.a}(4A^3C+6A^2B^2) + \frac{4.5\,A^4B}{1.2.3.4.5} - \frac{(a^2+6)\,A^6}{1.2.3.4.5.6.a} = o.$$

u. s. w.

Und hieraus;

$$A = 1$$

$$B = -\frac{2\,a}{3\,(a^2+2)} = -0{,}2093136$$

$$C = \frac{4\,a^2}{9\,(a^2+2)^2} = 0{,}0438127$$

$$D = \frac{a}{3.5\,(a^2+2)} - \frac{a\,(24+34\,a^2+3\,a^4)}{27\,(a^2+2)^3} = -0{,}0577576$$

$$E = \frac{a^2}{9(a^2+2)^2}\left(\frac{64\,a^2+18.(a^2+2)(a^2+4)}{9\,(a^2+2)^2} - \frac{6}{5}\right) = 0{,}0324219$$

9. Es ist mithin

$y_s = x - 0{,}2093136\, x^2 + 0{,}0438127\, x^3 - 0{,}0577576\, x^4 + 0{,}0324219\, x^5 - \ldots$

10. Wird z. B. $q = \frac{1}{2}$ gesetzt, so folgt aus der Reihe (1) $\varphi = 34^0\ 57'\ 8{,}1''$, wornach sich ergibt $x = 14^0 20' 28{,}43''$, und dann aus der Reihe (9) $y = 13^0\ 37'\ 4{,}07''$, so daß also für $q = \frac{1}{2}$ erstlich $\varphi = 34^0\ 57'\ 8{,}1''$, und dann $\varphi = 62^0\ 54'\ 40'6''$, woraus wir also belehrt werden, daß sowohl der Bogen von $34^0\ 57'\ 8{,}1''$ als auch der von $62^0\ 54'\ 40{,}6''$ die Hälfte seiner zuständigen Sekante sei.

11. Eine anderweitige Betrachtung des Umstandes, daß jedem Werthe von q zweierlei Werthe von φ entsprechen, leitet uns noch auf andere wichtige Folgesätze, welche wir hier des Zusammenhanges wegen nicht übergehen zu dürfen glaubten. Es sei der erste Werth von φ durch φ selbst vorgestellt, der andere aber durch $\varphi + x$, so ist für diesen andern erstlich nach dem Taylorischen Lehrsatze:

$$q = \varphi \cos\varphi + (\cos\varphi - \varphi \sin\varphi)\, x - (2 \sin\varphi + \varphi \cos\varphi)\, \frac{x^2}{1.2}$$
$$- (3 \cos\varphi - \varphi \sin\varphi)\, \frac{x^3}{1.2.3} + (4 \sin\varphi + \varphi \cos\varphi)\, \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+ (5 \cos\varphi - \varphi \sin\varphi)\, \frac{x^5}{1.2\ldots5} - (6 \sin\varphi + \varphi \cos\varphi)\, \frac{x^6}{1.2\ldots6} - \ldots$$

und dann, wenn man in dem Ausdrucke $q = (\varphi + x) \cos(\varphi + x)$ statt $\cos(\varphi + x)$ die entsprechende Reihe setzt;

$$q = (\varphi + x)$$
$$- \frac{1}{1.2} (\varphi^3 + 3\varphi^2 x + 3\varphi x^2 + x^3)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4} (\varphi^5 + 5\varphi^4 x + 10\varphi^3 x^2 + 10\varphi^2 x^3 + 5\varphi x^4 + x^5)$$
$$- \frac{1}{1.2\ldots6} (\varphi^7 + 7\varphi^6 x + 21\varphi^5 x^2 + 35\varphi^4 x^3 + 35\varphi^3 x^4 + 21\varphi^2 x^5 + 7\varphi x^6 + x^7)$$

$$+\frac{1}{1.2\ldots8}(\varphi^9+9\varphi^8x+36\varphi^7x^2+84\varphi^6x^3+126\varphi^5x^4$$
$$+126\varphi^4x^5+84\varphi^3x^6+36\varphi^2x^7+9\varphi x^8+x^9)$$
$$-\frac{1}{1.2\ldots10}(\varphi^{11}+11\varphi^{10}x+55\varphi^9x^2+165\varphi^8x^3+330\varphi^7x^4$$
$$+462\varphi^6x^5+462\varphi^5x^6+330\varphi^4x^7+165\varphi^3x^8$$
$$+55\varphi^2x^9+11\varphi x^{10}+x^{11})$$
$$+\ldots$$
rc.

Die Glieder dieser letzten Reihe können auch nach den Potenzen von x geordnet und zusammengestellt werden, und alsdann ist:

$$q=\varphi-\frac{\varphi^3}{1.2}+\frac{\varphi^5}{1.2.3.4}-\frac{\varphi^7}{1.2.3.4.5.6}+\ldots$$
$$+x\left(1-\frac{3\varphi^2}{1.2}+\frac{5\varphi^4}{1.2.3.4}-\frac{7\varphi^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{9\varphi^8}{1.2\ldots8}-\ldots\right)$$
$$-x^2\left(\frac{3\varphi}{1.2}-\frac{10\varphi^3}{1.2.3.4}+\frac{21\varphi^5}{1.2\ldots6}-\frac{36\varphi^7}{1.2\ldots8}+\ldots\right)$$
$$+x^3\left(-\frac{1}{1.2}+\frac{10\varphi^2}{1.2.3.4}-\frac{35\varphi^4}{1.2.3.4.5.6}+\frac{84\varphi^6}{1.2\ldots8}-\ldots\right)$$
$$-x^4\left(-\frac{5\varphi}{1.2.3.4}+\frac{35\varphi^3}{1.2.3.4.5.6}-\frac{126\varphi^5}{1.2\ldots8}+\frac{330\varphi^7}{1.2\ldots10}-\ldots\right)$$
$$+x^5\left(\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{21\varphi^2}{1.2.3.4.5.6}+\frac{126\varphi^4}{1.2\ldots8}-\frac{462\varphi^6}{1.2\ldots10}+\ldots\right)$$
$$-x^6\left(\frac{7\varphi}{1.2\ldots6}-\frac{84\varphi^3}{1.2\ldots8}+\frac{462\varphi^5}{1.2\ldots10}-\frac{1716\varphi^7}{1.2\ldots12}+\ldots\right)$$
$$+x^7\left(-\frac{1}{1.2\ldots6}+\frac{36\varphi^2}{1.2\ldots8}-\frac{330\varphi^4}{1.2\ldots10}+\frac{1716\varphi^6}{1.2\ldots12}-\ldots\right)$$
$$-x^8\left(-\frac{9\varphi}{1.2\ldots8}+\frac{165\varphi^3}{1.2\ldots10}-\frac{1287\varphi^5}{1.2\ldots12}+\frac{6435\varphi^7}{1.2\ldots14}-\ldots\right)$$
rc. rc.

Vergleicht man diesen letzten Ausdruck für q mit dem zuerst nach dem Taylorischen Lehrsatze erhaltenen, so gehen aus dieser Vergleichung folgende Sätze hervor:

$$\cos\varphi - \varphi\sin\varphi = 1 - \frac{3\varphi^2}{1.2} + \frac{5\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{7\varphi^6}{1.2\ldots6} + \frac{9\varphi^8}{1.2\ldots8} - \frac{11\varphi^{10}}{1.2\ldots10} + \ldots$$

$$\frac{2\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2} = \frac{3\varphi}{1.2} - \frac{10\varphi^3}{1.2.3.4} + \frac{21\varphi^5}{1.2\ldots6} - \frac{36\varphi^7}{1.2\ldots8} + \frac{55\varphi^9}{1.2\ldots10} - \frac{78\varphi^{11}}{1.2\ldots12} + \ldots$$

$$\frac{3\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3} = \frac{1}{1.2} - \frac{10\varphi^2}{1.2.3.4} + \frac{35\varphi^4}{1.2\ldots6} - \frac{84\varphi^6}{1.2\ldots8} + \frac{165\varphi^8}{1.2\ldots10} - \frac{286\varphi^{10}}{1.2\ldots12} + \ldots$$

$$\frac{4\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3.4} = \frac{5\varphi}{1.2.3.4} - \frac{35\varphi^3}{1.2\ldots6} + \frac{126\varphi^5}{1.2\ldots8} + \frac{330\varphi^7}{1.2\ldots10} + \frac{715\varphi^9}{1.2\ldots12} - \frac{1365\varphi^{11}}{1.2\ldots14} + \ldots$$

$$\frac{5\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{21\varphi^2}{1.2\ldots6} + \frac{126\varphi^4}{1.2\ldots8} - \frac{462\varphi^6}{1.2\ldots10} + \frac{1287\varphi^8}{1.2\ldots12} - \frac{3003\varphi^{12}}{1.2\ldots14} + \ldots$$

$$\frac{6\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5.6} = \frac{7\varphi}{1.2\ldots6} - \frac{84\varphi^3}{1.2\ldots8} + \frac{462\varphi^5}{1.2\ldots10} - \frac{1716\varphi^7}{1.2\ldots12} + \frac{5005\varphi^9}{1.2\ldots14} - \frac{12376\varphi^{11}}{1.2\ldots16} + \ldots$$

$$\frac{7\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{1.2\ldots6} - \frac{36\varphi^2}{1.2\ldots8} + \frac{330\varphi^4}{1.2\ldots10} - \frac{1716\varphi^6}{1.2\ldots12} + \frac{6435\varphi^8}{1.2\ldots14} - \frac{19448\varphi^{10}}{1.2\ldots16} + \ldots$$

$$\frac{8\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \frac{9\varphi}{1.2\ldots8} - \frac{165\varphi^3}{1.2\ldots10} + \frac{1287\varphi^5}{1.2\ldots12} - \frac{6435\varphi^7}{1.2\ldots14} + \frac{24310\varphi^9}{1.2\ldots16} - \frac{75582\varphi^{11}}{1.2\ldots18} + \ldots$$

$$\frac{9\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{1}{1.2\ldots8}-\frac{55\varphi^2}{1.2\ldots10}+\frac{715\varphi^4}{1.2\ldots12}-\frac{5005\varphi^6}{1.2\ldots14}$$

$$+\frac{24310\varphi^8}{1.2\ldots16}-\frac{92378\varphi^{10}}{1.2\ldots18}+\ldots$$

$$\frac{10\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}=\frac{11\varphi}{1.2\ldots10}-\frac{286\varphi^3}{1.2\ldots12}+\frac{3003\varphi^5}{1.2\ldots14}$$

$$-\frac{19448\varphi^7}{1.2\ldots16}+\frac{92378\varphi^9}{1.2\ldots18}-\frac{184756\varphi^{11}}{1.2\ldots20}+\ldots$$

u. s. w.

12. Um diese Sätze auf einen Allgemeinen zu bringen, bezeichne ${}^{m}B_{r}$ irgend einen Binomialcoefficienten, so daß m den Exponenten des Binomiums, r aber die Ordnungszahl des Gliedes vorstellt, zu welchem dieser Coefficient gehört, ferner bedeute n jede ganze positive Zahl, selbst o nicht ausgeschlossen, so hat man unter diesen Voraussetzungen:

$$\text{I.}\quad \frac{(2n+1)\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1.2\ldots\ldots(2n+1)}=\frac{{}^{2n+1}B_{2(n+1)}}{1.2\ldots2n}-\frac{{}^{2n+3}B_{(2n+1)}\varphi^2}{1.2\ldots2(n+1)}$$

$$+\frac{{}^{2n+5}B_{2(n+1)}\varphi^4}{1.2\ldots2(n+2)}-\frac{{}^{2n+7}B_{2(n+1)}\varphi^6}{1.2\ldots2(n+3)}+\ldots$$

$$\text{II.}\quad \frac{2n\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{1.2\ldots2n}=\frac{{}^{2n+1}B_{(2n+1)}\varphi}{1.2\ldots2n}-\frac{{}^{2n+3}B_{(2n+1)}\varphi^3}{1.2\ldots2(n+1)}$$

$$+\frac{{}^{2n+5}B_{(2n+1)}\varphi^5}{1.2\ldots2(n+2)}-\frac{{}^{2n+7}B_{(2n+1)}\varphi^7}{1.2\ldots2(n+3)}+\ldots$$

13. Sollte φ irgend ein Vielfaches des Quadranten oder von $\frac{\pi}{2}$ seyn, so kann man $\varphi=(2n+1)\frac{\pi}{2}+s$ annehmen, und dann ist:

$$q=\frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}+s}{\sec\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+s\right]}=\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+s\right]\cos\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+s\right].$$

$$=-\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}+s\right]\sin s=-(2n+1)\frac{\pi}{2}.\sin s-s.\sin s.$$

woraus

$$-\frac{2q}{(2n+1)\pi}=s+\frac{2s^2}{(2n+1)\pi}-\frac{s^3}{1.2.3}-\frac{2s^4}{1.2.3\,(2n+1)\pi}$$
$$+\frac{s^5}{1.2.3.4.5}+\frac{2s^6}{1.2\ldots5\,(2n+1)\pi}-\ldots$$

und durch Umkehrung

$$s=\frac{-2q}{(2n+1)\pi}-\frac{8q^2}{(2n+1)^3\pi^3}-\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\frac{8q^3}{(2n+1)^3\pi^3}$$
$$-\left(8(2n+1)^2\pi^2-5.7.8\right)\frac{16q^4}{1.2.3.(2n+1)^7\pi^7}-\ldots$$

14. Um einen Näherungsausdruck zu erhalten, bedeute a einen Bogen, der dem gesuchten φ sehr nahe kommt, und $\mathfrak{E}$ den Unterschied oder einen Theil dieses Unterschiedes zwischen a und φ, und man hat:

$$q=(a+\mathfrak{E})\cos(a+\mathfrak{E})=a\cos a\cos\mathfrak{E}-a\sin a\sin\mathfrak{E}$$
$$+\mathfrak{E}\cos a\cos\mathfrak{E}-\mathfrak{E}\sin a\sin\mathfrak{E},$$

welches wegen Kleinheit des Winkels $\mathfrak{E}$ übergehen kann in:

$$q=a\cos a+\mathfrak{E}(\cos a-a\sin a)-\mathfrak{E}^2.\sin a,$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{E}^2-\mathfrak{E}(\cot a-a)=a\cot a-q\operatorname{cosec} a$$

und wenn man auch $\mathfrak{E}^2$ vernachlässiget,

$$\mathfrak{E}=\frac{q\operatorname{cosec} a-a\cot a}{\cot a-a}=\frac{q-a\cos a}{\cos a-a\sin a}.$$

Sechstes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seiner zuständigen Cosekante.

1. Wenn $q = \frac{\varphi}{\operatorname{cosec}\varphi} = \varphi \sin\varphi$ gegeben ist, so ist es eben dadurch auch:

$$q = \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{1.2.3} + \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^8}{1.2\ldots7} + \frac{\varphi^{10}}{1.2\ldots9} - \frac{\varphi^{12}}{1.2\ldots11} + \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\varphi = q^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{q}{3.4} + \frac{29\,q^2}{2.2.3.4.5.6} + \frac{263\,q^3}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{50337\,q^4}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.8} + \frac{3749651\,q^5}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.8} + \ldots\right)$$

2. Diese Reihe convergirt zwar immer, aber bei größeren Winkeln so langsam, daß eine zu große Anzahl von Gliedern entwickelt werden müßte, um d n gesuchten Bogen φ nur mit einiger Genauigkeit auszumitteln. Läßt man daher q übergehen in $q + e$, während φ sich verwandelt in $(\varphi + x)$, so ist nach dem Taylorischen Lehrsatze:

$$q + e = \varphi\sin\varphi + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,x + (2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\frac{x^2}{1.2}$$
$$-(3\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\frac{x^3}{1.2.3} - (4\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+(5\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + (6\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots$$

und indem $q = \varphi \sin\varphi$, auch

$$e = (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,x + (2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\frac{x^2}{1.2}$$

$$-(3\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\frac{x^3}{1.2.3}-(4\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\frac{x^4}{1.2.3.4}$$

$$+(5\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+(6\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\frac{x^6}{1.2...6}...$$

3. Und wenn man $\varphi=\frac{\pi}{2}$ setzt, wodurch auch $q=\frac{\pi}{2}$, so ist ferner

$$e=x-\frac{\pi}{2}.\frac{x^2}{1.2}-\frac{3x^3}{1.2.3}+\frac{\pi}{2}.\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{5x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{\pi}{2}.\frac{x^6}{1.2...6}$$

$$-\frac{7x^7}{1.2...7}+\frac{\pi}{2}.\frac{x^8}{1.2...8}+\frac{9x^9}{1.2...9}-...$$

welche Reihe durch Umkehrung gibt:

$$x=e+\frac{\pi e^2}{4}+\frac{(4+\pi^2)e^3}{8}+\frac{\pi}{16}\left(\frac{29}{3}+\frac{5\ \pi^2}{4}\right)e^4$$

$$+\frac{4(68-3\pi^2)+21(12+\pi^2)\pi^2}{384}.e^5+...\text{ oder}$$

$$x=e+0{,}78539816\,e^2+1{,}7337005\,e^3+4{,}3204100\,e^4$$
$$+15{,}7612100\,e^5+...$$

4. Die in (2) für e hergestellte Reihe läßt noch andere mannigfache Umformungen zu, durch welchen Umstand erst sie allgemeine Brauchbarkeit gewinnt. Setzt man nämlich $\varphi=\frac{\pi}{3}$, so ist

$$e=\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}x+\frac{6-\pi\sqrt{3}}{6}.\frac{x^2}{1.2}-\frac{9\sqrt{3}+\pi}{6}.\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$-\frac{12-\pi\sqrt{3}}{6}.\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{15\sqrt{3}+\pi}{6}.\frac{x^5}{1.2...5}+\frac{18-\pi\sqrt{3}}{6}.\frac{x^6}{1.2...6}$$

$$-\frac{21\sqrt{3}+\pi}{6}.\frac{x^7}{1.2...7}-\frac{24-\pi\sqrt{3}}{6}.\frac{x^8}{1.2...8}$$

$$+\frac{27\sqrt{3}+\pi}{6}.\frac{x^9}{1.2...9}+...$$

was durch Umkehrung gibt:

$$x =$$

$$\frac{6e}{3\sqrt{3}+\pi} - \frac{18(6-\pi\sqrt{3})e^2}{(3\sqrt{3}+\pi)^3} + \frac{(9\sqrt{3}+\pi)(3\sqrt{3}+\pi)+12(6-\pi\sqrt{3})}{(3\sqrt{3}+\pi)^5} . 36e^3$$

$$+[(12-\pi\sqrt{3})(3\sqrt{3}+\pi)^2-10(6-\pi\sqrt{3})(9\sqrt{3}+\pi)(3\sqrt{3}+\pi)$$

$$-15(6-\pi\sqrt{3})] . \frac{54e^4}{(3\sqrt{3}+\pi)^7} + \dots$$

oder

$$x = 0{,}7196190.e - 0{,}0173472e^2 + 0{,}1428662e^3 - 0{,}0080777e^4 + \dots$$

5. Ebenso, wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$ gesetzt wird, hat man:

$$e = \frac{\sqrt{2}}{8}(4+\pi)x + \frac{\sqrt{2}}{8}(8-\pi)\frac{x^2}{1.2} - \frac{\sqrt{2}}{8}(12+\pi)\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(16-\pi)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{\sqrt{2}}{8}(20+\pi)\frac{x^5}{1.2\dots5} + \frac{\sqrt{2}}{8}(24-\pi)\frac{x^6}{1.2\dots6}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{8}(28+\pi)\frac{x^7}{1.2\dots7} - \frac{\sqrt{2}}{8}(32-\pi)\frac{x^8}{1.2\dots8} + \dots$$

und wieder durch Umkehrung:

$$x = \frac{8e}{(4+\pi)\sqrt{2}} - \frac{16(8-\pi)e^2}{(4+\pi)^3} + \frac{(12+\pi)(4+\pi)+3(8-\pi)}{3(4+\pi)^5\sqrt{2}} . 128e^3$$

$$+ \frac{2(16-\pi)(4+\pi)^2-10(8-\pi)(12+\pi)(4+\pi)-35(8-\pi)^3}{3(4+\pi)^7} . 64e^4 + \dots$$

oder

$$x = 0{,}7921000e - 0{,}2134169e^2 + 0{,}2906187e^3 - 0{,}179132e^4 + \dots$$

6. Obschon keine dieser unter 1. 3. 4. 5 dieses Kapitels entwickelten Reihen eine ausgedehnte Brauchbarkeit besitzt, so genügt nach Umständen doch immer die eine oder die andere zur Bestimmung des Bogens φ, und zwar die erste so lange $q < \frac{1}{2}$, die zweite so lange q von $\frac{\pi}{2}$

„ dritte „ q „ $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

„ vierte „ q „ $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

nicht viel abweicht, wobei für e der kleinste mögliche Werth zu wählen ist. Auch kann man nach Bedürfniß aus der unter (2) für e hergestellten Reihe noch andere Ausdrücke für e bei anderen Werthen des dortigen φ ableiten, z. B. wenn daselbst $\varphi = \frac{2\pi}{5}$, und man wird dann bei Winkeln im ersten Quadranten für den Bogen x durch Umkehrung immer eine sehr schnell zusammenlaufende Reihe erhalten, wenn nur dem e ein nicht zu großer Werth beigelegt worden.

7. Ist aber der gesuchte Bogen φ größer als $\frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\varphi$ negativ, und es gehen aus jenem in (2) für e hergestellten Ausdrucke keine schnell genug convergirenden Reihen hervor; in solchem Falle aber kann man setzen $\varphi = \frac{\pi}{2} + x$, wonach also

$$q = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos x.$$

Wird hier statt $\cos x$ die identische Reihe substituirt und das Ganze gehörig umgeformt, so hat man:

$$\frac{2q-\pi}{2} = x - \frac{\pi x^2}{2.2} - \frac{x^3}{1.2} + \frac{\pi x^4}{2.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4} - \frac{\pi x^6}{2.2.3.4.5.6}$$
$$- \frac{x^7}{1.2\ldots6} + \frac{\pi x^8}{2.2.3\ldots8} + \frac{x^9}{1.2\ldots8} - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$x = \frac{2q-\pi}{2} + \frac{\pi}{16}(2q-\pi)^2 + \frac{4+\pi^2}{64}(2q-\pi)^3$$
$$+ \frac{\pi(116+15\pi^2)(2q-\pi)^4}{3.2^{10}} + \frac{[304+3\pi^2(80+7\pi^2)](2q-\pi)^5}{3.2^{12}} + \ldots$$

8. Sollte der gesuchte Bogen φ ein Vielfaches des Halbkreises seyn, so kann man $\varphi = 2n\pi + s$ annehmen, und es ist sonach:

$$q = (2\,n\,\pi + s)\sin(2\,n\,\pi + s) = (2\,n\,\pi + s)\sin s$$
$$= (2\,n\,\pi + s)\left(s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\right)$$

indem 2 n jede gerade positive ganze Zahl bedeutet.

Hieraus ergibt sich nun nach einer kurzen Vereinfachung:

$$\frac{q}{2n\pi} = s + \frac{s^2}{2n\pi} - \frac{s^3}{1.2.3} - \frac{s^4}{1.2.3.2n\pi} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} + \frac{s^6}{1.2.3.4.5.2n\pi}$$
$$- \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \frac{s^8}{1.2.3.4.5.6.7.2\,n\pi} + \ldots$$

welche Reihe durch Umkehrung gibt:

$$s = \frac{q}{2\,n\,\pi} - \frac{q^2}{8\,n^3\,\pi^3} + \frac{(4\,n^2\pi^2 + 12)\,q^3}{2.3.2^5.n^5.\pi^5} + \frac{(15 - 8\,n^2\,\pi^2)\,q^4}{3.2^7.n^7.\pi^7}$$
$$+ \frac{1680 + 10\,(30 + 4\,n^2\,\pi^2)\,\pi^2 - 2^4\,n^4\,\pi^4}{1.2.3.4.5.2^9.n^9.\pi^9}\,q^5 + \ldots$$

9. Da auch hier $q = \varphi \sin \varphi$ ein Produkt ist und zwar aus den Faktoren φ und $\sin \varphi$, von denen der eine, wenigstens im 2, 4, 6, 8 u. s. w. Quadranten abnimmt, während der andere zunimmt, so folgt daß dieser Funktion ein Größtes und Kleinstes zukomme und man findet auf dem gewöhnlichen Wege $\frac{d\,q}{d\,\varphi} = \sin \varphi + \varphi \cos \varphi = 0$, oder $\varphi = -\operatorname{tang} \varphi$, was nach (13) des Kap. 3 bei einem Bogen $\varphi = 116^\circ\ 14'\ 21{,}3''$ statt hat, wo zugleich $q = 1{,}819706$ und zwar ein Größtes ist.

10. Ferner erhellet auch, daß jedem Werthe von q zwischen 0 und 1,819706 zweierlei Bögen zukommen, von denen der eine bei dem ersten Ablaufe des Kreises kleiner als $116^\circ\ 14'\ 21{,}3''$ und durch die Reihen in 1, 3, 4, 5, 7 gefunden wird, der andere aber zwischen $116^\circ\ 14'\ 21{,}3''$ und 180° liegt und sich ergiebt aus der Reihe (8), wenn man das dortige s negativ und $n = \frac{1}{2}$ nimmt, wornach hervorgeht:

$$s = +\frac{q}{\pi} + \frac{q^2}{\pi^3} + \frac{(12 + \pi^2)\, q^3}{2.3\, \pi^5} + \frac{(15 + 2\,\pi^2)\, q^4}{3.\pi^7}$$
$$+ \frac{1680 + 60\,(7 + 2\pi)\,\pi^2 + 9\,\pi^4}{1.2.3.4.5\,\pi^9} \,.\, q^5 + \ldots$$

11. Wenn der gesuchte Bogen φ einem andern Bogen a beinahe gleich ist, so daß beide nur um den sehr kleinen Bogen ξ von einander verschieden seyn können, so setze man $\varphi = (a + \xi)$, und es ist alsdann auch:
$q = (a + \xi) \sin (a + \xi) = (a + \xi) (\sin a \cos \xi + \cos a \sin \xi)$, woraus, wenn man wegen Kleinheit $\sin \xi = \xi$, $\cos \xi = 1$ setzt, und ξ^2 ganz vernachlässiget, für ξ sich folgender Ausdruck findet:

$$\xi = \frac{q - a \sin a}{a \cos a + \sin a}.$$

12. Nimmt man z. B. $q = 1$, so findet sich nach der Reihe in (4) $e = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = 1 - 0{,}90689965 = 0{,}09310034$, und sonach $x = 0{,}0669610 = 3^\circ\, 50'\, 11{,}7''$ also $\varphi = 63^\circ\, 50'\, 11{,}7''$; durch die Reihe in (10) aber und vorstehenden Näherungsausdruck erhält man bei demselben Werthe von q den Bogen $\varphi = 159^\circ\, 8'\, 30{,}8''$, woraus mithin zu ersehen, wie nicht nur der Bogen von $63^\circ\, 50'\, 11{,}7''$ sondern auch der von $159^\circ\, 8'\, 30{,}8''$ jeder seiner Cosekante gleich ist. Ist ferner $q = \frac{1}{2}$, so findet man erstlich durch die Reihe in (1) und die nämliche Näherungsformel in (11) $\varphi = 42^\circ\, 26'\, 49{,}43''$, und dann durch die Reihe in (10) und dieselbe Näherungsformel: $\varphi = 170^\circ\, 18'\, 59{,}46''$; und es ist sonach sowohl der Bogen von $42^\circ\, 26'\, 49{,}43''$ als auch der von $170^\circ\, 18'\, 59{,}46''$ jeder die Hälfte seiner zuständigen Cosekante.

13. Auch hier leitet der Umstand, daß jedem Werthe von q zwischen 0 und 1,819706 zweierlei Bögen zukommen, auf ähnliche wichtige Folgesätze wie im vorhergehenden Kapitel, deren Entwickelung wir hier folgen lassen.

Ist nämlich der eine Werth von φ durch φ selbst, der andere aber durch $\varphi + x$ vorgestellt, so ist für diesen andern Werth nach dem Taylorischen Lehrsatze:

$$q = \varphi \sin \varphi + (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) x + (2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \frac{x^2}{1.2}$$
$$- (3 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) \frac{x^3}{1.2.3} - (4 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \frac{x^4}{1.2.3.4}$$
$$+ (5 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + (6 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \frac{x^6}{1.2...6}$$
$$- (7 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) \frac{x^7}{1.2...7} - (8 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) \frac{x^8}{1.2...8}$$
$$+ (9 \sin \varphi + \varphi \cos \varphi) \frac{x^9}{1.2...9} + \ldots$$

14. Und dann, wenn man in dem Ausdrucke $q = (\varphi + x) \sin (\varphi + x)$ statt $\sin (\varphi + x)$ die gleichgeltende Reihe substituirt, so ist wieder:

$$q = \varphi^2 + 2 \varphi x + x^2$$
$$- \frac{1}{1.2.3} (\varphi^4 + 4 \varphi^3 x + 6 \varphi^2 x^2 + 4 \varphi x^3 + x^4)$$
$$+ \frac{1}{1.2...5} (\varphi^6 + 6 \varphi^5 x + 15 \varphi^4 x^2 + 20 \varphi^3 x^3 + 15 \varphi^2 x^4 + 6 \varphi x^5 + x^6)$$
$$- \frac{1}{1.2...7} (\varphi^8 + 8 \varphi^7 x + 28 \varphi^6 x^2 + 56 \varphi^5 x^3 + 70 \varphi^4 x^4$$
$$+ 56 \varphi^3 x^5 + 28 \varphi^2 x^6 + 8 \varphi x^7 + x^8)$$
$$+ \frac{1}{1.2...9} (\varphi^{10} + 10 \varphi^9 x + 45 \varphi^8 x^2 + 120 \varphi^7 x^3 + 210 \varphi^6 x^4$$
$$+ 252 \varphi^5 x^5 + 210 \varphi^4 x^6 + 120 \varphi^3 x^7 + 45 \varphi^2 x^8 + 10 \varphi x^9 + x^{10})$$
$$- \frac{1}{1.2...11} (\varphi^{12} + 12 \varphi^{11} x + 66 \varphi^{10} x^2 + 220 \varphi^9 x^3 + 495 \varphi^8 x^4$$
$$+ 792 \varphi^7 x^5 + 924 \varphi^6 x^6 + 792 \varphi^5 x^7 + 495 \varphi^4 x^8 + 220 \varphi^3 x^9$$
$$+ 66 \varphi^2 x^{10} + 12 \varphi x^{11} + x^{12})$$

2c. 2c.

oder wenn man diese Glieder nach den Potenzen von x zusammenstellt.

$$q = \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{1.2.3} + \frac{\varphi^6}{1.2...5} - \frac{\varphi^8}{1.2...7} + \ldots$$

$$+ x\left(2\varphi - \frac{4\varphi^3}{1.2.3} + \frac{6\varphi^5}{1.2...5} - \frac{8\varphi^7}{1.2...7} + \frac{10\varphi^9}{1.2...9} + \ldots\right)$$

$$+ x^2\left(1 - \frac{6\varphi^2}{1.2.3} + \frac{15\varphi^4}{1.2.3.4.6} - \frac{28\varphi^6}{1.2...7} + \frac{45\varphi^8}{1.2...9} + \ldots\right)$$

$$+ x^3\left(-\frac{4\varphi}{1.2.3} + \frac{20\varphi^3}{1.2.3.4.5} - \frac{56\varphi^5}{1.2...7} + \frac{120\varphi^7}{1.2...9} - \ldots\right)$$

$$+ x^4\left(-\frac{1}{1.2.3} + \frac{15\varphi^2}{1.2.3.4.5} - \frac{70\varphi^4}{1.2...7} + \frac{210\varphi^6}{1.2...9} - \ldots\right)$$

$$+ x^5\left(\frac{6\varphi}{1.2.3.4.5} - \frac{56\varphi^3}{1.2...7} + \frac{252\varphi^5}{1.2...9} - \frac{792\varphi^7}{1.2...11} + \ldots\right)$$

$$+ x^6\left(\frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{28\varphi^2}{1.2...7} + \frac{210\varphi^4}{1.2...9} - \frac{924\varphi^6}{1.2...11} - \ldots\right)$$

$$+ x^7\left(-\frac{8\varphi}{1.2...7} + \frac{120\varphi^3}{1.2...9} - \frac{792\varphi^5}{1.2...11} + \frac{3432\varphi^7}{1.2...13} - \ldots\right)$$

$$+ x^8\left(-\frac{1}{1.2...7} + \frac{45\varphi^2}{1.2...9} - \frac{495\varphi^4}{1.2...11} + \frac{3003\varphi^6}{1.2...13} - \ldots\right)$$

$$+ x^9\left(\frac{10\varphi}{1.2...9} - \frac{220\varphi^3}{1.2...11} + \frac{2002\varphi^5}{1.2...13} - \frac{11440\varphi^7}{1.2...15} + \ldots\right)$$

$$+ x^{10}\left(\frac{1}{1.2...9} - \frac{66\varphi^2}{1.2...11} + \frac{1001\varphi^4}{1.2...13} - \frac{8008\varphi^6}{1.2...15} + \ldots\right)$$

rc. rc.

15. Vergleicht man die Coefficienten von x in dieser Reihe mit jenen in der Reihe (12), so ergeben sich folgende Sätze:

$$\varphi \sin \varphi = \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{1.2.3} + \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^8}{1.2...7} + \frac{\varphi^{10}}{1.2...9}$$

$$- \frac{\varphi^{12}}{1.2...11} + \frac{\varphi^{14}}{1.2...13} - \ldots$$

$$\sin\varphi + \varphi\cos\varphi = 2\varphi - \frac{4\varphi^3}{1.2.3} + \frac{6\varphi^5}{1.2\ldots5} - \frac{8\varphi^7}{1.2\ldots7} + \frac{10\varphi^9}{1.2\ldots9} - \frac{12\varphi^{11}}{1.2\ldots11} + \frac{14\varphi^{13}}{1.2\ldots13} - \frac{16\varphi^{15}}{1.2\ldots15} + \ldots$$

$$\frac{2\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2} = 1 - \frac{6\varphi^2}{1.2.3} + \frac{15\varphi^4}{1.2.3.4.5} - \frac{28\varphi^6}{1.2\ldots7} + \frac{45\varphi^8}{1.2\ldots9} - \frac{66\varphi^{10}}{1.2\ldots11} + \frac{91\varphi^{12}}{1.2\ldots13} - \frac{120\varphi^{14}}{1.2\ldots15} + \ldots$$

$$\frac{3\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3} = \frac{4\varphi}{1.2.3} - \frac{20\varphi^3}{1.2.3.4.5} + \frac{56\varphi^5}{1.2\ldots7} - \frac{120\varphi^7}{1.2\ldots9} + \frac{220\varphi^9}{1.2\ldots11} - \frac{364\varphi^{11}}{1.2\ldots13} + \frac{560\varphi^{13}}{1.2\ldots15} - \frac{816\varphi^{15}}{1.2\ldots17} + \ldots$$

$$\frac{4\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3} - \frac{15\varphi^2}{1.2.3.4.5} + \frac{70\varphi^4}{1.2\ldots7} - \frac{210\varphi^6}{1.2\ldots9} + \frac{495\varphi^8}{1.2\ldots11} - \frac{1001\varphi^{10}}{1.2\ldots13} + \frac{1820\varphi^{12}}{1.2\ldots15} - \frac{3060\varphi^{14}}{1.2\ldots17} + \ldots$$

$$\frac{5\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5} = \frac{6\varphi}{1.2.3.4.5} - \frac{56\varphi^3}{1.2\ldots7} + \frac{252\varphi^5}{1.2\ldots9} - \frac{792\varphi^7}{1.2\ldots11} + \frac{2002\varphi^9}{1.2\ldots13} - \frac{4368\varphi^{11}}{1.2\ldots15} + \frac{8568\varphi^{13}}{1.2\ldots17} - \frac{15504\varphi^{15}}{1.2\ldots19} + \ldots$$

$$\frac{6\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{1.2.3.4.5} - \frac{28\varphi^2}{1.2\ldots7} + \frac{210\varphi^4}{1.2\ldots9} - \frac{924\varphi^6}{1.2\ldots11} + \frac{3003\varphi^8}{1.2\ldots13} - \frac{8008\varphi^{10}}{1.2\ldots15} + \frac{18564\varphi^{12}}{1.2\ldots17} - \frac{38760\varphi^{14}}{1.2\ldots19} + \ldots$$

$$\frac{7\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{8\varphi}{1.2\ldots7} - \frac{120\varphi^3}{1.2\ldots9} + \frac{792\varphi^5}{1.2\ldots11} - \frac{3432\varphi^7}{1.2\ldots13} + \frac{11440\varphi^9}{1.2\ldots15} - \frac{31824\varphi^{11}}{1.2\ldots17} + \frac{77520\varphi^{13}}{1.2\ldots19} - \frac{170544\varphi^{15}}{1.2\ldots21} + \ldots$$

$$\frac{8\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \frac{1}{1.2\ldots7} - \frac{45\varphi^2}{1.2\ldots9} + \frac{495\varphi^4}{1.2\ldots11} - \frac{3003\varphi^6}{1.2\ldots13} + \frac{12870\varphi^8}{1.2\ldots15} - \frac{43758\varphi^{10}}{1.2\ldots17} + \frac{125970\varphi^{12}}{1.2\ldots19} - \frac{319770\varphi^{14}}{1.2\ldots21} + \ldots$$

$$\frac{9\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{10\,\varphi}{1.2...9}-\frac{220\,\varphi^3}{1.2...11}+\frac{2002\,\varphi^5}{1.2...13}-\frac{11440\,\varphi^7}{1.2...15}$$
$$+\frac{48620\varphi^9}{1.2...17}-\frac{167960\varphi^{11}}{1.2...19}+\frac{497420\varphi^{13}}{1.2...21}-\frac{1307504\varphi^{15}}{1.2...23}+...$$

$$\frac{10\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}=\frac{1}{1.2...9}-\frac{66\,\varphi^2}{1.2...11}+\frac{1001\,\varphi^4}{1.2...13}-\frac{8008\,\varphi^6}{1.2...15}$$
$$+\frac{43758\varphi^8}{1.2...17}-\frac{184756\varphi^{10}}{1.2...19}+\frac{746646\varphi^{12}}{1.2...21}-\frac{2061256\varphi^{15}}{1.2...23}+...$$

ꝛc. ꝛc.

16. Um diese Sätze allgemein zu fassen, bedeute ${}^{m}B_{r}$ irgend einen Binomialcoefficienten, so daß m den Exponenten des Binomiums, r aber die Ordnungszahl des Gliedes, dem jener Coefficient angehört, vorstellt, ferner bedeute n irgend eine ganze positive Zahl, so stellen sich folgende zwei allgemeine Sätze heraus:

I. $$\frac{(2n+1)\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{1.2.3...(2n+1)}=\frac{{}^{2(n+1)}B_{2(n+1)}\varphi}{1.2.3...(2n+1)}-\frac{{}^{2(n+2)}B_{2(n+1)}\varphi^3}{1.2.3...(2n+3)}$$
$$+\frac{{}^{2(n+3)}B_{2(n+1)}\,\varphi^5}{1.2.3...(2n+5)}-\frac{{}^{2(n+5)}B_{2(n+1)}\,\varphi^7}{1.2.3...(2n+7)}+...$$

II. $$\frac{2n\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}{1.2.3...2n}=\frac{{}^{2n}B_{(2n+1)}}{1.2...(2n-1)}-\frac{{}^{2(n+1)}B_{(2n+1)}\,\varphi^2}{1.2...(2n+1)}$$
$$+\frac{{}^{2(n+2)}B_{(2n+1)}\,\varphi^4}{1.2...(2n+3)}-\frac{{}^{2(n+3)}B_{(2n+1)}\,\varphi^6}{1.2...(2n+5)}+...$$

Siebentes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seinem zuständigen Sinus versus.

1. Wenn gegeben ist $q = \frac{1 - \cos\varphi}{\varphi}$, so ist zugleich

$$q = \frac{\varphi}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3.4} + \frac{\varphi^5}{1.2...6} - \frac{\varphi^7}{1.2...8} + \frac{\varphi^9}{1.2...10} - \frac{\varphi^{11}}{1.2...12} + \ldots$$

und man findet durch Umkehrung:

$$\varphi = 2q + \frac{2^3.q^3}{3.4} + \frac{13.2^5.q^5}{1.2.3.4.5.6} + \frac{311.2^7.q^7}{3^2.4.5.6.7.8} + \frac{15688.2^9q^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$$
$$+ \frac{281085.2^{11}.q^{11}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} + \ldots$$

welche Reihe jedoch für Winkel, die $\frac{\pi}{3}$ übersteigen, wegen zu schwacher Convergenz nicht mehr große Brauchbarkeit besitzt.

2. Weil aber, wenn $q = \frac{1 - \cos\varphi}{\varphi}$ gegeben ist, auch

$$q = \frac{2.\frac{1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi \, . \sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

welcher nach (1) des Kap. (1) in eine Reihe entwickelt in folgenden übergeht:

$$q = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{2.3} + \frac{1.3.\sin^3\frac{1}{2}\varphi}{2.4.5} + \frac{1.3.5.\sin^5\frac{1}{2}\varphi}{2.4.6.7}$$
$$+ \frac{1.3.5.7.\sin^7\frac{1}{2}\varphi}{2.4.6.8.9} + \frac{1.3.5.7.9.\sin^9\frac{1}{2}\varphi}{2.4.6.8.10.11} + \ldots$$

und durch Umkehrung gibt:

$$\sin \tfrac{1}{2}\varphi = q + \frac{q^3}{2.3} + \frac{94\, q^5}{2^2.3^2.4.5} + \frac{2159\, q^7}{2.3^2.4.5.6.7} + \frac{658778\, q^9}{2^2.3.4.5^2.6.7.8.9}$$

$$+ \frac{8637740\, q^{11}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} + \frac{80323562963\, q^{13}}{2.3.4\, 5^2.6.7^2.8.9.10.11.12.13} + \ldots$$

3. Daß beide Reihen, sowohl die in (1) für φ, als die in (2) für $\sin \frac{1}{2}\varphi$ entwickelte dann am schwächsten convergiren, wenn die darin vorkommende veränderliche Größe q ein Größtes ist, erhellet von selbst; wann aber dieses der Fall sei, findet sich durch Bestimmung des Größten und Kleinsten des Ausdruckes $q = \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi}$, wodurch auf gewöhnlichem Wege sich ergiebt: $1 = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$, d. i. die Gleichung für die Abscisse der Kreisevolvente, wenn selbe dem Halbmesser der Evolute gleich wird.

Ist nämlich (Fig. 1) ALMA die Evolute, und ANHPQR die Evolvente, so ist AQ die Abscissenaxe, und es findet sich, wenn $AC = a$ angenommen wird, für irgend einen Punkt N der Evolvente die Abscisse $CS = x = a\,(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi)$. Vergl. Eytelwein's Handb. der Statik fester Körper, 3ter Bd., 3ter Abschn. 2te Aufl. Berlin 1832.

4. Soll nun q ein Größtes oder $1 = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$ seyn, so muß zugleich $x = a$ oder die Abscisse dem Halbmesser der Evolute gleich seyn, woraus zu erschließen, daß bei dem ersten Ablaufe des Kreises q in zweierlei Fällen ein Größtes sei nämlich:

a) für $\varphi = 0$ wo $q = 1$, und

b) „ $\varphi = 133^\circ\, 33'\, 48{,}4''$, wo $q = 0{,}72461165$

welches letztere dadurch gefunden worden, daß man in dem Ausdrucke $1 = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$ den Bogen $\varphi = \pi - \mu$ setzte, und nach geschehener Reduktion für $\sin \mu$ und $\cos \mu$ die treffenden Reihen substituirte, so daß nach gehöriger Zusammenziehung der ganze Ausdruck in folgenden übergeht:

$$\frac{2}{\pi} = \mu - \frac{\mu^3}{1.2.3} + \frac{3\mu^4}{1.2.3.4\,\pi} + \frac{\mu^5}{1.2\ldots5} - \frac{5\mu^6}{1.2\ldots6\pi} - \frac{\mu^7}{1.2\ldots7}$$
$$+ \frac{7\mu^8}{1.2\ldots8\,\pi} + \frac{\mu^9}{1.2\ldots9} - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\mu = \frac{2}{\pi} + \frac{2^3}{1.2.3\pi^3} - \frac{2}{\pi^5} + \frac{3.2^2}{\pi^5} - \frac{4.5.2^2}{3^2.\pi^7} + \frac{5.9\,(5\,\pi^2+7)\,2^7}{1.2\ldots7\,\pi^9}$$
$$- \frac{5509.2^8}{1.2\ldots8\,\pi^9} + \ldots$$

eine sehr schwach convergirende Reihe, weßhalb die dadurch ermittelten Werthe für $\mu = 0{,}6788205$ und $\varphi = 2{,}4627720 = 140^0$ ungefähr nur und bloß als Basis eines Näherungsausdruckes gelten können. Setzt man nämlich in dem Ausdrucke $1 = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$ den Bogen $\varphi = a + \mathfrak{E}$, und läßt a einstweilen 140^0, $\mathfrak{E}$ aber annäherungsweise den Unterschied zwischen φ und a bedeuten, so ist

$$1 = (a + \mathfrak{E}) \sin(a + \mathfrak{E}) + \cos(a + \mathfrak{E}),$$

woraus, indem $\mathfrak{E}$ nur ein sehr kleiner Bogen seyn soll, gefunden wird:

$$\mathfrak{E} = \frac{1 - \cos a - a \sin a}{a \cos a}$$

was endlich nach wiederholten Näherungsversuchen mit hinreichender Genauigkeit gibt: $\varphi = 133^0\,33'\,48{,}4''$, und für die Evolvente des Kreises folgt die wichtige Eigenschaft, daß bei dem ersten Ablaufe des Kreises ihre Abscisse in zweierlei Fällen dem Halbmesser der Evolute gleich werden kann, nämlich wenn

a) der Bogen der Evolute $\varphi = 0^0$

b) „ „ „ $\varphi = 133^0\,33'\,48'4'' = ALF$ (Fig. 1).

5. Da also, wenn $q = 1$, keine Frage mehr nach dem Bogen φ seyn kann, so müssen die Reihen in (1) und (2) zur Lösung jeder hieher bezüglichen Aufgabe genügen, ausgenommen, wenn q seinem Größten sehr nahe ist, und ausgenommen den Fall, wo der gesuchte Bogen φ irgend ein Viel-

faches des Halbkreises π enthalten soll. In diesem letzteren Falle setze man $\varphi = 2\,(2\,n + 1)\,\pi + 2\,\chi$ und man hat:

$$q = \frac{2\,(2n+1)\pi + 2\pi}{1 - \cos 2\,((2n+1)\pi + 2\chi)} = \frac{2\,((2\,n+1)\,\pi + \chi)}{2 \sin^2 \frac{1}{2} . 2\,((2n+1)\pi + \chi)}$$

$$= \frac{(2\,n+1)\,\pi + \chi}{\sin^2 \chi}.$$

6. Wird dieser letztere Ausdruck für q in eine Reihe verwandelt, und darnach rechts und links des Gleichheitszeichens durch $(2\,n + 1)\,\pi$ dividirt, so ergibt sich:

$$\frac{q}{(2n+1)\pi} = \sin^{-2}\chi + \frac{\sin^{-1}\chi}{(2n+1)\pi} + \frac{\sin\chi}{2.3(2n+1)\pi} + \frac{3 \sin^3 \chi}{2.4.5(2n+1)\pi}$$

$$+ \frac{3.5 \sin^5 \chi}{2.4.6.7(2n+1)\pi} + \frac{3.5.7 \sin^7 \chi}{2.4.6.8.9(2n+1)\pi} + \ldots$$

woraus man durch Umkehrung findet:

$$\sin \chi = \left(\frac{(2n+1)\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2q} + \frac{1}{8q\sqrt{(2n+1)\pi q}} + \frac{(2n+1)\pi}{3.4q^2}$$

$$+ \frac{16(2n+1)^2\pi^2 - 1}{2^7.(2n+1)\pi q^2 \sqrt{(2n+1)\pi q}} + \frac{9(2n+1)^2\pi^2 + 20}{2.3.5.8\, q^3} + \ldots$$

Weil hier $q = \dfrac{(2n+1)\pi + \chi}{\sin^2 \chi}$ immer größer als 1 und zwar um so mehr, je größer n ist, so wird auch die hier für $\sin \chi$ entwickelte Reihe um so mehr convergiren, je größer n ist.

7. Da nach (5) dennoch ein Paar Fälle sich ereignen können, in denen zur Erreichung einer größeren Genauigkeit eine Annäherungsformel leichtere und schnellere Dienste leisten kann, obschon die in (1), (2) und (6) entwickelten Reihen außerdem sehr gut zusammenlaufen, so bezeichne a einen Bogen, der dem gesuchten φ schon so nahe als möglich ist, und ε den kleinen Unterschied zwischen a und φ, so hat man:

$q = \dfrac{a + \varepsilon}{1 - \cos\,(a + \varepsilon)}$, und wegen Kleinheit des Winkels ε auch

$$q = \frac{a + \xi}{1 - \cos a + \xi \sin a}, \text{ woraus hervorgeht}$$

$$\xi = \frac{q(1 - \cos a) - a}{1 - q \sin a}.$$

8. Da $q = \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi}$ einen größten und kleinsten Werth hat, so muß man auch abnehmen, daß jedem Werthe von q zwischen 0 und 0,72461165 zweierlei Bögen φ entsprechen, deren einer bei dem ersten Ablaufe des Kreises durch die Reihe in (1) oder (2) gefunden wird, der andere aber aus der Reihe in (5) sich ergibt, indem man das dortige χ negativ nimmt. Setzt man nämlich $\varphi = 2(2n+1)\pi - 2\chi$, so ist

$$q = \frac{2(2n+1)\pi - 2\chi}{1 - \cos(2(2n+1)\pi - 2\chi)} = \frac{2((2n+1)\pi - \chi)}{2.\sin^2 \frac{1}{2}.(2(2n+1)\pi - \chi)}$$

$$= \frac{(2n+1)\pi - \chi}{\sin^2((2n+1)\pi - \chi)} = \frac{(2n+1)\pi - \chi}{\sin^2 \chi}$$

und wenn man den Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens wie in (6) in eine Reihe verwandelt

$$q = (2n+1)\pi \sin^{-2}\chi - \sin^{-1}\chi - \frac{\sin^{-3}\chi}{2.3} - \frac{1.3 \sin^3 \chi}{2.4.5}$$

$$- \frac{1.3.5 \sin^5 \chi}{2.4.6.7} - \frac{1.3.5.7 \sin^7 \chi}{2.4.6.8.9} - \frac{1.3.5.7.9 \sin^9 \chi}{2.4.6.8.10.11} - \ldots$$

woraus durch Umkehrung hervorgeht

$$\sin \chi = \left(\frac{(2n+1)\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{8q\sqrt{(2n+1)\pi q}} - \frac{(2n+1)\pi}{3.4\, q^2}$$

$$+ \frac{16(2n+1)^2\pi^2 - 1}{2^7.(2n+1)\pi q^2 \sqrt{(2n+1)\pi q}} - \frac{9(2n+1)^2\pi^2 + 20}{2.3.5.8\, q^3}$$

$$+ \frac{4.5.6.9.12(2n+1)^4\pi^4 + 2^4.5^2(2n+1)^3\pi^3 - 2^4.3^2.5^2(2n+1)^2\pi^2 + 3^2.5}{2.3.4.6.8.10.12(2n+1)^2\pi^2.q^3\sqrt{(2n+1)\pi q}} - \ldots$$

9. Würde man nun in demselben Ausdrucke

$q = \frac{2(2n+1)\pi+2\chi}{1 - \cos(2(2n+1)\pi+2\chi)}$ nehmen $n = -\frac{1}{2}$ und χ positiv lassen, so ergäbe sich für $\sin \chi$ der nämliche Ausdruck $q = \frac{\chi}{\sin^2 \chi}$ wie in (2) für $\sin \frac{1}{2} \varphi$. Ein ganz anderer aber ergibt sich aus (8), wenn man dort $n = 0$ setzt, nämlich:

$$\sin \chi = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{8q\sqrt{\pi q}} - \frac{\pi}{3.4q^2} + \frac{16\pi^2-1}{2^7\pi q^2\sqrt{\pi q}}$$

$$- \frac{9\pi^2+20}{2.3.5.8\,q^3} + \frac{4.5.6.9.12\pi^4+2^4.5^2.\pi^3-2^4.3^2 5^2\pi^2+3^2.5}{2.3.4.6.8.10.12\pi^2 q^3\sqrt{\pi q}} - \ldots$$

Man erhält also bei dem nämlichen Werthe von q auch zwei verschiedene Werthe des Bogens φ, den einen durch die Reihe in (2) oder auch durch die Reihe in (8), wenn man das dortige $n = -\frac{1}{2}$ setzt, den andern aber durch die Reihe in (9), wobei der gesuchte Bogen $\varphi = 2\pi - 2\chi$, nur hat die Reihe in (9) den Nachtheil, daß sie für Winkel, bei denen q seinem Kleinsten oder q seinem Größten nahe kommt, äußerst schwach zusammenläuft, welcher Nachtheil aber durch die Näherungsformel in (7) füglicher gehoben werden kann als durch Herstellung einer besonderen Reihe.

10. Bei wiederholten Kreisabläufen wird einzig die Reihe in (8) brauchbar seyn, und um die zweierlei Werthe des Bogens φ zu finden, die bei einem bestimmten Kreisablaufe einem und demselben q entsprechen, müssen daselbst je nach der Vielfachheit des Kreisablaufes für n zwei sich zunächst folgende ganze Zahlen gesetzt werden, wie solche eben dem Zwecke genügen.

Achtes Kapitel.

Von dem Verhältniße des Kreisbogens zu seinem zuständigen Cosinus versus.

1. Wenn φ bekannt und $q = \frac{1 - \sin\varphi}{\varphi}$, so ergibt sich auch zugleich folgender Ausdruck:

$$q = \frac{1}{\varphi} - 1 + \frac{\varphi^2}{1.2.3} - \frac{\varphi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\varphi^6}{1.2...7} - \frac{\varphi^8}{1.2...9} + \frac{\varphi^{10}}{1.2...11} - \frac{\varphi^{12}}{1.2...13} + \ldots$$

2. Setzt man dagegen $q = \frac{\varphi}{1 - \sin\varphi}$, so hat man:

$$q = \varphi + \varphi \sin\varphi + \varphi \sin^2\varphi + \varphi \sin^3\varphi + \varphi \sin^4\varphi + \ldots$$

3. Fingirt man aber vorläufig den Quotienten, indem man

$$\frac{\varphi}{1 - \sin\varphi} = A\varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 + E\varphi^5 + F\varphi^6 + G\varphi^7 + H\varphi^8 + I\varphi^9 + K\varphi^{10} + \ldots$$

annimmt, und statt $\sin\varphi$ die gleichgeltende Reihe substituirt, so ist, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Nenner herstellt, und den ganzen Ausdruck auf Null zurückbringt:

$$0 = \left\{\begin{array}{l}
A\varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 + E\varphi^5 + F\varphi^6 + G\varphi^7 + H\varphi^8 + I\varphi^9 + K\varphi^{10} + \ldots \\
\quad - A\varphi^2 - B\varphi^3 - C\varphi^4 - D\varphi^5 - E\varphi^6 - F\varphi^7 - G\varphi^8 - H\varphi^9 - I\varphi^{10} - \ldots \\
\quad\quad + \frac{A\varphi^4}{1.2.3} + \frac{B\varphi^5}{1.2.3} + \frac{C\varphi^6}{1.2.3} + \frac{D\varphi^7}{1.2.3} + \frac{E\varphi^8}{1.2.3} + \frac{F\varphi^9}{1.2.3} + \frac{G\varphi^{10}}{1.2.3} + \ldots \\
\quad\quad\quad - \frac{A\varphi^6}{1.2..5} - \frac{B\varphi^7}{1.2..5} - \frac{C\varphi^8}{1.2..5} - \frac{D\varphi^9}{1.2..5} - \frac{E\varphi^{10}}{1.2..5} - \ldots \\
\quad\quad\quad\quad + \frac{A\varphi^8}{1.2...7} + \frac{B\varphi^9}{1.2...7} + \frac{C\varphi^{10}}{1.2...7} + \ldots \\
\quad\quad\quad\quad\quad - \frac{A\varphi^{10}}{1.2...9} - \ldots \\
-\varphi
\end{array}\right.$$

woraus die Ziffergröße der fingirten Coefficienten sich ergiebt wie folgt:

$A = 1$, $D = \frac{5}{1.2.3}$, $G = \frac{272}{1.2.3.4.5.6}$, $K = \frac{50521}{1.2...9}$, $N = \frac{22368256}{1.2...12}$,

$B = 1$, $E = \frac{2}{3}$, $H = \frac{1385}{1.2...7}$, $L = \frac{353792}{1.2...10}$, $O = \frac{199250421}{1.2...13}$,

$C = 1$, $F = \frac{61}{1.2.3.4.5}$, $I = \frac{992}{1.2...7}$, $M = \frac{2702765}{1.2..11}$, $P = \frac{1902209472}{1.2...14}$.

u. s. w.

Mithin ist

$$q = \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + \frac{5\varphi^4}{1.2.3} + \frac{16\varphi^5}{1.2.3.4} + \frac{61\varphi^6}{1.2.3.4.5} + \frac{272\varphi^7}{1.2.3.4.5.6}$$

$$+ \frac{1385\varphi^8}{1.2...7} + \frac{7936\varphi^9}{1.2...8} + \frac{50521\varphi^{10}}{1.2...9} + \ldots$$

von welcher Reihe jedoch das Gesetz des allgemeinen Fortganges nicht so leicht zu erkennen ist.

4. Vergleicht man aber ihre Coefficienten mit jenen der beiden folgenden Reihen:

$$\tang \varphi = \varphi + \frac{2\varphi^3}{2.3} + \frac{16\varphi^5}{2.3.4.5} + \frac{272\varphi^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{7936\varphi^9}{1.2...9} + \ldots$$

$$\sec \varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{5\varphi^4}{2.3.4} + \frac{61\varphi^6}{2.3.4.5.6} + \frac{1385\varphi^8}{1.2...8} + \frac{50521\varphi^{10}}{1.2...10} + \ldots$$

so findet sich, daß wenn man jedes Glied dieser Reihen noch mit dem Exponenten seiner veränderlichen Größe φ multiplicirt, alsdann die Glieder der Reihe für tang φ den ungeraden, die Glieder der Reihe für sec φ den geraden Gliedern der in (3) für q entwickelten Reihe gleichkommen, und es erhellet also genugsam die Beschaffenheit des allgemeinen Gliedes, da die Tangenten- und Secanten-Coefficienten in ihrer Allgemeinheit in Schnürlein's angeführtem Programme hergestellt sind. Es ist nämlich, wenn n die Ordnungszahl des Gliedes vom ersten an bezeichnet, für ein ungerades n das allgemeine Glied:

$$T_n = \frac{n(4^n - 1) \cdot 2^{n+1} \cdot \overset{n}{B} \cdot \varphi^n}{1.2.3\ldots(n+1)}$$

wo $\overset{n}{B}$ die der Ordnungszahl n entsprechende Bernoullische Zahl bedeutet;
und für ein gerades n

$$T_n = n \cdot \overset{n}{W} \varphi^n,$$

wobei $\overset{n}{V}$ denjenigen Secanten-Coefficienten bezeichnet, welcher in der Reihe für sec φ zu φ^n gehört.

5. Will man aus der Verhältnißzahl q den zuständigen Bogen finden, so läßt sich die Reihe in (1) durch Uebertragung des -1 auf die linke Seite des Gleichheitszeichens in folgende abändern:

$$1+q=\varphi^{-1}+\frac{\varphi^2}{1.2.3}-\frac{\varphi^4}{1.2.3.4.5}+\frac{\varphi^6}{1.2...7}-\frac{\varphi^8}{1.2...9}$$
$$+\frac{\varphi^{10}}{1.2...11}-\frac{\varphi^{12}}{1.2...13}+\ldots$$

bei welcher Reihe die Differenz der Exponenten $\delta=1$, der Coefficient des Anfangsgliedes $A_0=1$, die Coefficienten des ersten und zweiten Gliedes nach dem Anfangsgliede, d. i. A_1 und A_2, so wie ferner die Coefficienten der Glieder mit ungeraden Exponenten $=0$ zu nehmen sind. Unb sonach ergibt sich durch Umkehrung derselben:

$$\varphi=\frac{1}{1+q}+\frac{1}{1.2.3(1+q)^4}-\frac{1}{1.2.3.4.5(1+q)^6}+\frac{3}{4.9(1+q)^7}$$
$$+\frac{1}{1.2...7(1+q)^8}+\frac{8}{1.2.3.4.5.6(1+q)^9}+\frac{20159}{1.2...9(1+q)^{10}}$$
$$+\frac{41}{2.3^2.4^2.5.6.7(1+q)^{11}}-\frac{508199}{1.2...11(1+q)^{12}}+\frac{153908}{1.2...10(1+q)^{13}}$$
$$+\frac{8298575}{1.2...13(1+q)^{14}}-\frac{4840486}{1.2...12(1+q)^{15}}+\ldots$$

6. Diese Reihe ist sehr brauchbar, so lange q einen solchen Werth hat, daß sie mit demselben noch hinreichend convergirt. Ihre Brauchbarkeit verliert sich aber, wenn q über $\frac{1}{3}$ herabkommt, welches für Bögen über 15° der Fall ist. Setzt man aber $\dfrac{\varphi}{1-\sin\varphi}=q$, und verwandelt den Ausdruck in eine Reihe, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{q}{1+q}=\varphi-\frac{q\varphi^3}{1.2.3(1+q)}+\frac{q\varphi^5}{1.2.3.4.5(1+q)}-\frac{q\varphi^7}{1.2...7(1+q)}$$
$$+\frac{q\varphi^9}{1.2...9(1+q)}-\frac{q\varphi^{11}}{1.2...11(1+q)}+\ldots$$

und durch Umkehrung

$$\varphi=\frac{q}{1+q}+\frac{q^4}{1.2.3(1+q)^4}+\frac{9(q-1)q^6}{1.2.3.4.5(1+q)^7}+\frac{(225q^2-54q+1)q^8}{1.2...7(1+q)^{10}}$$
$$+\frac{(11025q^3-4131q^2+243q-1)q^{10}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,(1+q)^{13}}+\ldots$$

welche Reihe gewiß um so mehr convergirt, je größer q ist; doch aber erstreckt sich ihre Brauchbarkeit nicht viel auf Winkel, die dem $\frac{\pi}{2}$ nahe kommen, bei denen nämlich q seinem Größten $=\infty$ nahezu gleich ist.

7. Für diesen Fall schien es uns am zweckdienlichsten, zu einer Näherungsformel die Zuflucht zu nehmen. Es bezeichne daher a einen Bogen, der dem gesuchten φ ziemlich nahe kommt und ε annäherungsweise den Unterschied zwischen a und φ, so hat man:

$$q=\frac{1-\sin(a+\varepsilon)}{a+\varepsilon}$$

woraus folgt:

$a\,q+q\,\varepsilon=1-\sin a\cos\varepsilon-\cos a\sin\varepsilon$, oder

$a\,q+q\,\varepsilon=1-\sin a\sqrt{1-\sin^2\varepsilon}-\cos a\sin\varepsilon$

und weil bei einem Bogen von etwa 5^0 der Sinus von seinem Bogen erst um 0,001 abweicht, so darf man für ein ε zwischen 0^0 und 5^0 ohne einen großen Fehler zu begehen, $\varepsilon=\sin\varepsilon$ setzen. Unter dieser Voraussetzung kann obiger Ausdruck übergehen in:

$a\,q+q\sin\varepsilon=1-\sin a\sqrt{1-\sin^2\varepsilon}-\cos a\sin\varepsilon$,

wovon die Berechnung, wie folgt, zu stehen kommt:

$a\,q+q\sin\varepsilon+\cos a\sin\varepsilon-1=-\sin a\sqrt{1-\sin^2\varepsilon}$

$$(a\,q - 1) + (q + \cos a)\sin\mathfrak{E} = -\sin a\sqrt{1 - \sin^2\mathfrak{E}}$$

$$(a\,q - 1)^2 + 2\,(a\,q - 1)\,(q + \cos a)\sin\mathfrak{E} + (q + \cos a)^2\sin^2\mathfrak{E} = \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2\mathfrak{E}$$

$$(a\,q - 1)^2 + 2\,(a\,q - 1)\,(q + \cos a)\sin\mathfrak{E} + ((q + \cos a)^2 + \sin^2 a)\sin^2\mathfrak{E} = \sin^2 a$$

$$(a\,q - 1)^2 + 2\,(a\,q - 1)\,(q + \cos a)\sin\mathfrak{E} + (q^2 + 2\,q\cos a + 1)\sin^2\mathfrak{E} = \sin^2 a$$

$$\sin^2\mathfrak{E} + \frac{2\,(a\,q - 1)\,(q + \cos a)}{q^2 + 2\,q\cos a + 1} = \frac{\sin^2 a - (a\,q - 1)^2}{q^2 + 2\,q\cos a + 1}$$

$$\sin\mathfrak{E} = -\frac{(a\,q - 1)\,(q + \cos a)}{q^2 + 2\,q\cos a + 1}$$

$$+\sqrt{\frac{\sin^2 a - (a\,q - 1)^2}{q^2 + 2\,q\cos a + 1} + \frac{(a\,q - 1)^2\,(q + \cos a)^2}{(q^2 + 2\,q\cos a + 1)^2}}$$

Ist so z. B. $q = 1$, so findet sich $\varphi = 29^\circ\ 52'\ 48{,}6''$, welcher Bogen also seinem Cosinus versus gleich kommt.

8. Untersucht man den Ausdruck $q = \frac{\varphi}{1 - \sin\varphi}$ in Bezug auf seinen größten oder kleinsten Werth, so ergibt sich durch Differenzirung: $1 = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi$, d. i. die Gleichung für die Ordinate der Kreisevolvente, wenn selbe dem Halbmesser der Evolute gleich wird.

9 Daß in dem Ausdrucke: $1 = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi$ dem Bogen φ einmal der Werth $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zukommen kann, ist offenbar; aber ebenso ist es auch offenbar, daß darin bei dem ersten Ablaufe des Kreises noch ein anderer Werth für φ zulässig ist. Um diesen letzteren zu finden, setze man $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \mu$, und dann geht obiger Ausdruck über in:

$$1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\mu\right)-\left(\frac{3\pi}{2}+\mu\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\mu\right), \text{ oder}$$

$$1 = -\cos\mu + \left(\frac{3\pi}{2}+\mu\right)\sin\mu.$$

Werden hier statt cos μ und sin μ die entsprechenden Reihen substituirt, so erhält man nach gehöriger Zusammenziehung des Ganzen folgende Reihe:

$$-\frac{4}{3\pi} = \mu - \frac{\mu^3}{1.2.3} - \frac{2\mu^4}{1.2.3.4\pi} + \frac{\mu^5}{1.2...5} + \frac{2.5\mu^6}{1.2...6.3\pi}$$
$$-\frac{\mu^7}{1.2...7} - \frac{2.7\mu^8}{1.2...8.3\pi} + \frac{\mu^9}{1.2...9} + \frac{2.9\mu^{10}}{1.2...10.3\pi} - ...$$

und durch Umkehrung:

$$\mu = -\frac{4}{3\pi} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4\pi}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^4 - \frac{9}{1.2...5}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^5$$
$$+ \frac{200}{1.2.3.4.5.6.3\pi}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^6 - \frac{5.(45\pi^2+28)}{1.2.3.4.5.6.7\pi^2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^7$$
$$+ \frac{11018}{1.2.3.4.5.6.7.8.3\pi}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^8 - \frac{25(441\pi^2-868)}{1.2..9\pi^2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^9$$
$$+ \frac{4(100841\pi^2+5.7.10.11(2\pi^2-3))}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\pi^3}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^{10} - ...$$

d. i. $\mu = -0{,}43724247 = -25^0\ 3'\ 28''$, oder folglich $\varphi = 244^0\ 56'\ 32''$ welcher Werth für φ jedoch wegen zu schwachen Zusammenlaufens der Reihe noch einiger Berichtigung bedarf. Man nehme deßhalb:

$a = 244^0\ 56'\ 32''$ und setze $\varphi = a + \xi$, so ist auch

$$1 = \sin(a+\xi) - (a+\xi)\cos(a+\xi)$$
$$= \sin a \cos\xi + \cos a \sin\xi - a\cos a\cos\xi$$
$$+ a\sin a\sin\xi - \xi\cos a\cos\xi + \xi\sin a\sin\xi.$$

Indem aber ξ doch nur ein kleiner Bogen seyn kann, so darf man annäherungsweise $\cos\xi = 1$ und $\sin\xi = \xi$ setzen; mithin ist $1 = \sin a - a\cos a + a\xi\sin a + \xi^2\sin a$, aus welcher Gleichung dann gefunden wird:

$$\xi = \sqrt{a \cot a + \operatorname{cosec} a + \frac{a^2}{4} - 1} - \frac{a}{2}$$

was nach wiederholten Näherungsversuchen gibt:

$\varphi = 243^\circ\ 31'\ 13''$.

10. Die Ordinate der Kreisevolvente wird also bei dem ersten Ablaufe des Kreises in zweierlei Fällen dem Halbmesser der Evolute gleich, nämlich (Fig. 1)

a) für $\varphi = AL = \frac{\pi}{2}$ und $q = \infty$

b) „ $\varphi = ALMW = 243^\circ\ 31'\ 13''$ und $q = 2{,}2427590$.

Es ist demnach

a) für $\varphi = 0$ und $q = 0$

b) „ $\varphi = 243^\circ\ 31'\ 13''$ und $q = 2{,}2427590$

die Verhältnißzahl q ein Kleinstes; für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ aber ist $q = \infty$ ein Größtes.

11. Soll φ irgend ein Vielfaches des ganzen Umkreises seyn, so setze man $\varphi = 2n\pi - x$, und man hat:

$q = \frac{1 - \sin(2n\pi - x)}{2n\pi - x} = \frac{1 + \sin x}{2n\pi - x}$, woraus nach kurzer Rechnung sich ergibt:

$$\frac{2n\pi q - 1}{1+q} = x - \frac{x^3}{1.2.3(1+q)} + \frac{x^5}{1.2\ldots5(1+q)} - \frac{x^7}{1.2\ldots7(1+q)}$$
$$+ \frac{x^9}{1.2\ldots9(1+q)} - \frac{x^{11}}{1.2\ldots11(1+q)} + \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$x = \frac{2n\pi q - 1}{1+q} + \frac{(2n\pi q - 1)^3}{1.2.3(1+q)^4} + \frac{(9-q)(2n\pi q - 1)^5}{1.2.3.4.5(1+q)^7}$$
$$+ \frac{(225 - 54q + q^2)(2n\pi q - 1)^7}{1.2.3.4.5.6.7(1+q)^{10}}$$
$$+ \frac{(11025 - 4131q + 243q^2 - q^3)(2n\pi q - 1)^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9(1+q)^{13}} + \ldots$$

12. Da aber $q = 0$ für $\varphi = 0$, und $q = \infty$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für jeden Bogen $\varphi > \frac{\pi}{2}$ zugleich $q > 2{,}2427590$ seyn muß, indem bei $\varphi = 243^\circ\ 31'\ 13''$ die Verhältnißzahl $q = 2{,}2427590$ für Winkel, die den ersten Quadranten übersteigen, ihren kleinsten Werth erreicht, so ist zu erschließen, daß bei dem ersten Ablaufe des Kreises jedem Werthe von q zwischen 0 und 2,2427590 nur einerlei Bogen φ zukommen könne, und daß jedem Werthe von q zwischen 2,2427590 und ∞ aber dreierlei Bögen φ entsprechen müssen, wovon der erste kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und durch die Reihe in (3) oder (4) gefunden wird; der zweite Werth von φ muß zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $243^\circ\ 31'\ 13''$ liegen, und ergibt sich aus der Reihe in (11), indem man das dortige $n = \frac{1}{2}$ setzt, den ganzen Ausdruck aber zugleich nach dieser Annahme abändert; der dritte Werth für φ liegt zwischen $243^\circ\ 31'\ 13''$ und $\frac{5\pi}{2}$ und ergibt sich ebenfalls aus der Reihe in (11) indem man das dortige $n = 1$ nimmt, so daß man bei einem und demselben $q > 2{,}2427590$ für φ folgende drei Werthe zugleich aufstellen kann:

$$\text{I.}\quad \varphi = \frac{q}{1+q} + \frac{q^4}{1.2.3\,(1+q)^4} + \frac{9(q-1)q^6}{1.2.3.4.5\,(1+q)^7} + \frac{(225q^2-54q+1)q^8}{1.2...7\,(1+q)^{10}} + \frac{(11025q^3-4131q^2+243q-1)q^{10}}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,(1+q)^{13}} + \ldots$$

$$\text{II.}\quad \varphi = \pi + \frac{\pi q - 1}{1-q} + \frac{(\pi q-1)^3}{1.2.3\,(1-q)^4} + \frac{(9-q)(\pi q-1)^5}{1.2.3.4.5\,(1-q)^7} + \frac{(225-54q+q^2)(\pi q-1)^7}{1.2...7\,(1-q)^{10}} + \frac{(11025-4131q+243q^2-1)(\pi q-1)^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,(1-q)^{13}} + \ldots$$

$$\text{III.}\quad \varphi = 2\pi - \frac{2\pi q - 1}{1+q} - \frac{(2\pi q - 1)^3}{1.2.3\,(1+q)^4} - \frac{(9-q)(2\pi q - 1)^5}{1.2.3.4.5\,(1+q)^7}$$
$$- \frac{(225-54q+q^2)(2\pi q-1)^7}{1.2...7\,(1+q)^{10}} - \frac{(11025-4131q+243q^2-1)(2\pi q-1)^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9\,(1+q)^{13}} - ..$$

13. Bei wiederholten Abläufen des Kreises sind zu Auffindung der gehörigen Werthe des Bogens φ an der Reihe (11) ähnliche Abänderungen zu treffen.

Anhang.

I.

Eine fein polirte Metallplatte von der Breite a sei in ihrer Mitte der ganzen Länge nach festgemacht; an beiden Enden der Breite werde sie durch Schrauben, die an ihrer Rückseite angebracht sind, bogenförmig nach vorne getrieben: so wird sie einen Theil einer Cylinderfläche vorstellen, welche gegen die Sonnenstrahlen gehalten, einen Brennspiegel abgeben wird, dessen Brennweite man so weit in seiner Gewalt hat, als man der Platte durch die rückwärts angebrachten Schrauben eine beliebige Krümmung geben kann. Gibt man ihr eine sphärische Krümmung, so daß b die Sehne des Bogens ist, dessen Länge = a die Breite der Metallplatte ist, und stellt r den Radius des Cylinders vor, nach welchem die Krümmung vor sich gehen soll, so ist die Brennweite (Optik) $= \frac{r}{2}$. Um nun diese Brennweite bei einer gegebenen Länge a des Cylinderbogens und dessen Sehne b zu finden, hat man keinen andern Ausweg, als vorher den Winkel des Bogens a, dem die Sehne b zugehört, aufzusuchen. Bezeichnet nun 2φ die Länge desselben Bogens bei dem Halbmesser = 1, so ist $a = 2r\varphi$

$$b = 2r \sin\varphi$$

und folglich $\frac{a}{b} = \frac{2 r \varphi}{2 r \sin \varphi} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}$
woraus der Bogen φ nach Kap. 1. sich finden läßt, indem man das dortige $q = \frac{a}{b}$ nimmt.

Nimmt man anstatt auf die Länge der Sehne b darauf Rücksicht, wie weit der Cylinderbogen durch die Schrauben an den Enden seiner Breite nach vorne getrieben ist, und mißt dieses Vorwärtstreiben und die Länge des Bogens a durch einerlei Maaß, so ist diese Aufgabe unter Kap. 7 begriffen und darnach zu behandeln.

II.

Bei der verkürzten Cycloide (S. Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper. III. Bd. 2te Ausg. S. 14) findet für die Ordinate die Gleichung statt: $y = r \varphi - r' \sin \varphi$. Soll nun die Curve die Abscissenaxe schneiden, so kann dieses in zwei Fällen geschehen, entweder wenn $\varphi = 0$, was im Anfangspunkte A der Fall ist, oder wenn $r \varphi = r' \sin \varphi$, und für diesen letzten Fall ist dann

$$\frac{r'}{r} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

Ist nun bekannt, wie der Radius r des Erzeugungskreises und jener r' des beschreibenden sich zu einander verhalten, so ist nach Kap. 1. auch der Winkel bestimmt, um welchen der Erzeugungskreis sich drehen darf, damit die Curve zum zweiten Male die Abscissenaxe schneide.

III.

Da es möglich ist, auf der Erdoberfläche die geradlinige Entfernung d zweier Orte sammt der Länge a des dazwischen liegenden terrestrischen Bogens in Fußen, Ruthen oder Meilen zu bestimmen ohne den Erdhalbmesser r im Voraus zu kennen,

so läßt sich aus dem Verhältnisse $\frac{a}{d}$, welches kein anderes ist als das Verhältniß zwischen Sehne und Bogen, die Größe des Winkels am Mittelpunkte der Erde ableiten, welche jenem Bogen entspricht, und daraus der Erdhalbmesser r selbst mit vollständiger Genauigkeit auffinden. Bezeichnet nämlich wieder 2φ die Länge dieses Bogens für den Halbmesser 1, so ist

$a = 2 r \varphi$, und

$d = 2 r \sin \varphi$, und man hat

$$\frac{a}{d} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}.$$

Ist nun hieraus φ nach Kap. 1. gefunden, so ergibt sich auch r als einer der Schenkel eines gleichschenkeligen Dreieckes, in welchem die Basis d und der Winkel 2φ an der Spitze bekannt sind.

Sind in einem terrestrisch-sphärischen Dreiecke Bögen und Sehnen durch einerlei Maaß gemessen und gegeben, und es sollen daraus, ohne daß der Kugelhalbmesser im Voraus bekannt ist, die sphärischen Winkel des Dreieckes angegeben werden, so kann dieses nur geschehen, nachdem vorher nach diesem Verfahren der Kugelhalbmesser gefunden worden; und daher wird der Inhalt des Kap. 1. eine wesentliche Ergänzung zur Reduktion sphärischer Dreiecke auf die dazu gehörigen Sehnendreiecke bilden.

IV.

Von einem regulären Polygone ist der Perimeter p nebst dem Radius r des darum beschriebenen Kreises gegeben; man soll n die Anzahl der Seiten des Polygones finden.

Nachdem das reguläre Polygon (Fig. 2) in n unter sich congruente Dreiecke getheilt worden, fälle man in einem ABC derselben von dem Polygonsmittelpunkte C eine Senkrechte CD auf die Basis AB, so ist in dem rechtwinkligen $\triangle$ ACD:

$$1 : AC = \sin ACD : AD$$

und da $AC = r$, $ACD = \frac{180^0}{n} = \frac{\pi}{n}$, und $AD = \frac{p}{2n}$, so hat man auch:

$$1 : r = \sin \frac{\pi}{n} : \frac{p}{2n}$$

oder wenn man $\frac{\pi}{n} = \varphi$ setzt, woraus zugleich folgt: $n = \frac{\pi}{\varphi}$,

$$1 : r = \sin \varphi : \frac{p\varphi}{2\pi}$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{2r\pi}{p}$$

aus welcher Gleichung φ und daraus auch $n = \frac{\pi}{\varphi}$ nach Kap. 1. sich finden läßt.

V.

Von demselben Polygone wie in (IV.) sei der Flächeninhalt a gegeben nebst dem Radius r des darum beschriebenen Kreises; man soll die Seitenzahl n des Polygons finden.

Mit Beibehaltung derselben Bezeichnungen wie in der eben vorhergehenden Aufgabe ist:

$$\text{Polyg.} = n \,.\, \triangle ACB = n \,.\, AD \,.\, CD = n \,.\, r \sin \varphi \,.\, r \,.\, \cos \varphi$$

$$= \frac{nr^2}{2} \sin 2\varphi$$

mithin $a = \frac{nr^2}{2} \sin 2\varphi$, oder da $n = \frac{\pi}{\varphi}$,

$$a = \frac{r^2\pi}{2\varphi} \sin 2\varphi$$

woraus folgt:

$$\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{r^2\pi}{a}$$

und es läßt sich φ berechnen, und mithin nach Kap. 1. auch n.

VI.

Von einem regulären Polygone ist der Perimeter p nebst dem Radius r des darin beschriebenen Kreises gegeben; man soll die Seitenzahl n des Polygones finden.

Es sei (Fig. 2) $\triangle$ FCG eines der n congruenten Dreiecke, aus welchen das um den Kreis beschriebene Polygon mit dem Perimeter p besteht, so ist in diesem Dreiecke, nachdem man von der Spitze C die Senkrechte CE auf die Grundlinie FG gefällt hat, 1 : tang ECG = CE : EG, oder auch nach Einführung derselben Bezeichnung wie in (IV.)

$1 : \text{tang}\ \varphi = r : \frac{p}{2n}$, und da zugleich $n = \frac{\pi}{\varphi}$, auch

$1 : \text{tang}\ \varphi = r : \frac{p\varphi}{2\pi}$, also

$$\frac{\varphi}{\text{tang}\ \varphi} = \frac{2r\pi}{p}$$

woraus die Berechnung von φ und damit auch von n nach Kap. 3. zu geschehen hat.

VII.

Von einem regulären Polygone ist der Flächeninhalt a nebst dem Radius r des darin beschriebenen Kreises bekannt, man soll die Seitenzahl n desselben finden.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung ist:

$$a = n \triangle FCG = n . FE . CE = nr . \text{tgng}. \varphi . r = nr^2 \text{tang}\ \varphi$$
$$= \frac{\pi}{\varphi} r^2 \text{tang}\ \varphi$$

also

$$\frac{\varphi}{\text{tang}\ \varphi} = \frac{r^2 \pi}{a}$$

woraus wieder φ nebst n nach Kap. 3. gefunden wird.

VIII.

Die Euler'schen Aufgaben über die Kreislinie (Introd. in Analys. Infinit. Auctore Leonardo Eulero, Tom. II. cap. 22.) analytisch und, wo möglich, nach gegenwärtiger Schrift aufgelöst.

1. Aufgabe.

Den Kreisbogen zu finden, der seinem Cosinus gleich ist.

Die Auflösung findet sich bereits in (7) Kap. 2.

2. Aufgabe.

Den Kreissektor (Fig. 3) ACB zu finden, der durch die Sehne AB in zwei gleiche Theile getheilt werde, so daß das Dreieck ACB gleich sei dem Kreisabschnitte AEB.

Auflösung.

Es sei (Fig. 3) der Radius AC = 1, der gesuchte Bogen AEB = φ; man halbire diesen Bogen durch den Radius CE, so ist AF = $\sin\frac{\varphi}{2}$, und CF = $\cos\frac{\varphi}{2}$, daher

Δ ACB = $\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2}$, und der Sektor ACB

selbst ist = $\frac{\varphi}{2}$, und da dieser dem doppelten Dreiecke gleich

seyn soll, so hat man: $\sin\varphi = \frac{\varphi}{2}$, oder $2 = \frac{\varphi}{\sin\varphi}$, und

nach (6) des Kap. 1. findet sich zuerst für q = 2

$\varphi = 1{,}86457900 = \text{arc. } 106^\circ\ 50'$ ungefähr.

Indem aber, wie a. a. O. bemerkt ist, die für φ hergestellte Reihe wegen des hier etwas großen Werthes von q nicht hinlänglich convergirt, so darf man den sonach gefundenen Werth für φ auch nur als Basis eines Näherungsausdruckes

ansehen, und man findet sofort nach (9) des näml. Kapitels $\varphi = 108^\circ\ 36'\ 13{,}7''$.

Würde die Aufgabe geheißen haben, die Sehne AB so zu ziehen, daß Sektor und Segment sich zu einander verhälten $= m : n$, so wäre

$$\frac{\varphi}{2} = \text{Sektor AEB},$$

$$\frac{\varphi}{2} - \Delta\ ACB = \frac{\varphi}{2} - \sin\varphi = \text{Segment AEB, mithin}$$

$$\frac{\varphi}{2} : \frac{\varphi}{2} - \sin\varphi = m : n$$

woraus folgt

$$\frac{\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2n}{m-n}$$

und φ immerhin nach Kap. 1. gefunden werden kann.

3. Aufgabe.

In dem Kreisquadranten ACB (Fig. 4) den Sinus DE so zu ziehen, daß er die Fläche des Quadranten halbirt.

Auflösung.

Es sei der Bogen $AE = s$, so wird $BE = \frac{\pi}{2} - s$ seyn, weil $AEB = \frac{\pi}{2}$; ferner der Flächeninhalt des Quadranten $= \frac{\pi}{4}$. Nun ist die Fläche des Sektors $ACE = \frac{s}{2}$, wovon das Dreieck $CDE = \frac{1}{2}\sin s \cos s$ abgezogen den Raum $ADE = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin s\cos s$ übrig lassen wird, welcher den halben Quadranten geben soll. Es ist daher $\frac{\pi}{4} = s - \frac{1}{2}\sin 2s$, und also $s - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sin 2s$.

Man setze den Bogen $s - \frac{\pi}{4} = s - 45^0 = u$, so wird $2\,s = 90^0 + 2\,u$ seyn, und deßwegen auch $u = \frac{1}{2}\cos 2\,u$, und $2\,u = \cos 2\,u$. Da also eigentlich der Bogen gesucht wird, der seinem Cosinus gleich ist, und dieser schon in der ersten (Eulerischen) Aufgabe nach Kap. 2. gefunden worden, so ist $2\,u = 42^0\,20'\,47{,}233''$ und $u = 21^0\,10'\,23{,}616''$. Daher ist also der Bogen AE $= 66^0\,10'\,23{,}616''$ und der Bogen BE $= 23^0\,49'\,36{,}384''$. Es wird also nach demselben Verfahren, wodurch der Quadrant in zwei gleiche Theile getheilt wird, der ganze Kreis in acht gleiche Theile getheilt.

Wäre in der Aufgabe verlangt, von dem Quadranten irgend einen mten Theil desselben durch den Sinus DE abzuschneiden, so würde sich zwar auf dieselbe Weise finden: $\frac{\pi}{4\,m} = s - \frac{1}{2}\sin 2\,s$, aber jene einfache Substitution $s - 45^0 = u$ fruchtet dann nichts mehr. Setzt man indeß statt $\sin 2\,s$ die entsprechende Reihe, so folgt nach leichter Reduktion:

$$\frac{3\,\pi}{8m} = s^3 - \frac{2^3.3s^5}{1.2..5} + \frac{2^5.3.s^7}{1.2...7} - \frac{2^7.3.s^9}{1.2...9} + \frac{2^9.3.s^{11}}{1.2...11} - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$s = \left(\frac{3\,\pi}{8m}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3.5}\left(\frac{3\,\pi}{8\,m}\right)^{\frac{3}{3}} + \frac{2}{3^2.5.7}\left(\frac{3\,\pi}{8\,m}\right)^{\frac{5}{3}} + \frac{4608}{1.2...9.5}\left(\frac{3\,\pi}{8\,m}\right)^{\frac{7}{3}}$$
$$+ \frac{320928}{1.2...11.5}\left(\frac{3\,\pi}{8m}\right)^{\frac{9}{3}} + \ldots$$

4. Aufgabe.

In einem gegebenen Halbkreise AEDB (Fig. 5) aus dem Punkte A eine Sehne AD so zu ziehen, daß sie die Fläche des Halbkreises in zwei gleiche Theile zerschneidet.

Auflösung.

Es sei der gesuchte Bogen AD = s; zieht man den Halbmesser CD, so ist die Fläche des Sektors ACD $= \frac{s}{2}$; wird von selbem das Dreieck ACD $= \frac{1}{2}$ AC. DE $= \frac{1}{2} \sin s$ abgezogen, so bleibt das Segment AD $= \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \sin s$, welches der Hälfte des Halbkreises ADB gleich seyn soll; aber die Fläche des Halbkreises ist $= \frac{\pi}{2}$; daher hat man $s - \sin s = \frac{\pi}{2}$, und mithin $s - \frac{\pi}{2} = \sin s$. Setzt man nun $s - \frac{\pi}{2} = u$, so ist $\sin s = \cos u$, und deßwegen auch $u = \cos u$. Durch die erste (Eulerische) Aufgabe hat man gefunden $u = 42^\circ\, 20'\, 47{,}233''$, und mithin ist $s =$ AD $= 132^\circ\, 20'\, 47{,}233''$.

Im Allgemeinen würde diese Aufgabe heißen: in einem gegebenen Halbkreise AEDB aus dem Punkte A eine Sehne AD so zu ziehen, daß sie von der Fläche des Halbkreises den mten Theil abschneidet. Zu dem Ende ergibt sich ganz nach derselben Schlußfolge: $s - \sin s = \frac{\pi}{m}$. Aber die eben vorhergehende Aufgabe enthält im Allgemeinen die Bedingung: $s - \frac{1}{2} \sin 2s = \frac{\pi}{4m}$ oder auch $2s - \sin 2s = \frac{\pi}{2m}$. Verdoppelt man daher die Werthe von s und m in der vorigen Aufgabe, so ergibt sich dadurch die Lösung der gegenwärtigen.

Soll der Halbkreis in m gleiche Theile getheilt werden, nicht von A aus, einem Endpunkte des Durchmessers, sondern von F ans, einem Punkte auf dem Durchmesser gelegen, so sei FC = a in Theilen des Radius AC = 1 ausgedrückt; alsdann ist der Sektor BCD $= \frac{\pi - s}{2}$, und das Dreieck FCD $= \frac{a \sin s}{2}$, folglich der Aufgabe gemäß $\frac{\pi - s}{2} + \frac{a \sin s}{2} = \frac{\pi}{2m}$

oder wenn man $\pi - s = \mu$ setzt, $\frac{\mu}{2} + a \sin \mu = \frac{\pi}{2m}$. In diesem Ausdrucke ist statt $\sin \mu$ die entsprechende Reihe zu nehmen, wodurch derselbe nach der geeigneten Umänderung übergeht in

$$\frac{\pi}{m(1+a)} = \mu - \frac{\mu^3}{2.3(1+a)} + \frac{\mu^5}{2.3.4.5(1+a)} - \frac{\mu^7}{2.3.4.5.6.7(1+a)}$$

$$+ \frac{\mu^9}{2.3.4.5.3.7.8.9(1+a)} - \frac{\mu^{11}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11(1+a)} + \ldots$$

woraus man durch Umkehrung erhält:

$$\mu = \frac{\pi}{m\,(1+a)} + \frac{\pi^3}{2.3.m^3\,(1+a)^4} + \frac{2\,(8-3\,a)\,\pi^5}{2.3.4.5.6.m^5\,(1+a)^7}$$

$$+ \frac{3\,(1+a)^2 - 3\,.\,5\,.\,7\,(1+a) + 350}{2.3.4.5.6.7.3.\,m^7\,(1+a)^{10}} \,.\, \pi^7$$

$$- \frac{5\,(1+a)^3 - 738\,(1+a)^2 + 8820\,(1+a) - 19600}{2.3.4.5.6.7.8.9.5.\,m^9\,(1+a)^{13}} \,.\, \pi^9 - \ldots$$

5. Aufgabe.

Aus einem Punkte A der Peripherie zwei Sehnen AB, AC zu ziehen, die die Fläche des Kreises in drei gleiche Theile theilen (Fig. 6).

Auflösung.

Anstatt die Aufgabe bloß in dem besonderen Falle, wie Euler ihn gesetzt hat, aufzulösen, soll sie hier so gefaßt werden: aus dem Punkte A der Peripherie eine Sehne AB oder AC so zu ziehen, daß sie von der Kreisfläche den mten Theil abschneidet, so daß das Segment AFC oder AEC $= \frac{\pi}{m}$ (wenn π die ludolphische Zahl bedeutet und der Radius des Kreises $= 1$ ist). Es sei der Bogen AC oder AB $= s$, so wird der Flächeninhalt des Segmentes AFC oder AEB seyn:

$= \frac{s}{2} - \frac{\sin s}{2}$. Es muß also $\frac{s}{2} - \frac{\sin s}{2} = \frac{\pi}{m}$ seyn. Setzt man hierin für sin s die zuständige Reihe, so erhält man:

$$\frac{12\pi}{m} = s^3 - \frac{s^5}{4.5} + \frac{s^7}{4.5.6.7} - \frac{s^9}{4.5.6.7.8.9} + \frac{s^{11}}{4.5.6.7.8.9.10.11} - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$s = \left(\frac{12\pi}{m}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3.4.5}\left(\frac{12\pi}{m}\right)^{\frac{3}{3}} + \frac{3}{4.5.6.7.5}\left(\frac{12\pi}{m}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$+ \frac{12}{4.5.6.7.8.9.5}\left(\frac{12\pi}{m}\right)^{\frac{7}{3}} + \frac{3483}{2.3\ldots11.5.7}\left(\frac{12\pi}{m}\right)^{\frac{9}{3}} + \ldots$$

eine hinlänglich brauchbare Reihe, wenn m nur größer als 3 oder 4 ist; außerdem aber convergirt sie nicht genugsam.

Da aber in dem Falle, in welchem Euler diese Aufgabe behandelt, $m = 3$ ist, so setze man $s = \pi - \mu$, uud man hat alsdann $\frac{\pi - \mu}{2} - \frac{\sin(\pi - \mu)}{2} = \frac{\pi}{m}$, oder auch $(m-2)\frac{\pi}{m} = \mu + \sin\mu$. Wird hier wieder statt $\sin\mu$ die bekannte Reihe genommen, so ergibt sich

$$\frac{(m-2)\pi}{2m} = \mu - \frac{\mu^3}{1.2.3} + \frac{\mu^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\mu^7}{1.2\ldots7} + \frac{\mu^9}{1.2\ldots9}$$

$$- \frac{\mu^{11}}{1.2\ldots11} + \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\mu = \frac{(m-2)\pi}{2m} + \frac{(m-2)^3\pi^3}{3.4.2^3.m^3} + \frac{(m-2)^5\pi^5}{3.4.5.2^5.m^5} + \frac{43\,(m-2)^7\pi^7}{2.2.3\ldots7.2^7.m^7}$$

$$+ \frac{446(m-2)^9\pi^9}{2.3.4\ldots9.2^9.m^9} + \ldots$$

Ist also $m = 3$, so findet sich $\mu = 0{,}5362666 = 30^\circ\, 43'\, 33''$ und $s = AEB = AFC = 149^\circ\, 16'\, 27''$.

6. Aufgabe.

In dem Halbkreise AEB einen Bogen AE abzuschneiden, so daß, nachdem sein Sinus ED gezogen ist, der Bogen AE gleich sei der Summe der Geraden AD + DE, (den Bogen zu finden, der seinem Sinus und Sinus versus zusammen genommen gleich ist). (Fig. 7.)

Auflösung.

Weil sogleich erhellet, daß dieser Bogen größer ist als ein Viertelkreis, so suchen wir dessen Supplement BE und heißen den Bogen BE = s, so daß der Bogen AE = 180° — s = π — s, und wegen AC = 1, CD = cos s, DE = sin s, hat man π — s = 1 + cos s + sin s.

Setzt man hierin ferner noch $s = \frac{\pi}{4} - \mu$, so wird

$$\pi - \frac{\pi}{4} + \mu = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right)$$

oder auch $\frac{3\pi}{4} - 1 = -\mu + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \mu\right)$

$$= -\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} . \cos\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\mu + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\mu - \frac{\sqrt{2}}{2} . \sin\mu$$

$$= -\mu + \sqrt{2} . \cos\mu.$$

Wird hier cos μ durch seine Reihe ausgedrückt, so ergibt sich nach kurzer Reduktion:

$$1 + \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4} = \mu + \frac{\mu^2\sqrt{2}}{1.2} - \frac{\mu^4\sqrt{2}}{1.2.3.4} + \frac{\mu^6\sqrt{2}}{1.2.3.4.5.6}$$

$$- \frac{\mu^8\sqrt{2}}{1.2...8} + \frac{\mu^{10}\sqrt{2}}{1.2...10} - \ldots$$

und durch Umkehrung:

$$\mu = \left(1 + \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \sqrt{2} - \frac{3\pi}{4}\right)^2$$

$$+\left(1+\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\right)^3-\frac{29\sqrt{2}}{1.2.3.4}\left(1+\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\right)^4$$
$$+\frac{19}{1.2.3}\left(1+\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\right)^5-\frac{3361}{1.2\ldots6}\left(1+\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\right)^5$$
$$+\frac{561}{5.8}\left(1+\sqrt{2}-\frac{3\pi}{4}\right)^7-\ldots$$

welcher Ausdruck nach seiner Berechnung gibt $\mu = 0{,}05581668$ $= 3^\circ\ 11'\ 53''$; es ist also $s = 41^\circ\ 48'\ 7''$ und der gesuchte Bogen $AE = 138^\circ\ 11'\ 57''$.

7. Aufgabe.

Einen Sektor ACD abzuschneiden, der die Hälfte des Dreieckes ACE ist, das von dem Radius AC, der Tangente AE und der Sekante CE gebildet wird. (Fig. 8.)

Auflösung.

Soll auch diese Aufgabe allgemein behandelt werden, und soll der verlangte Sektor der mte Theil des genannten Dreieckes seyn, so sei der Bogen $AD = s$, und es wird der Sektor $ACD = \frac{1}{2}\, s$, das Dreieck $ACD = \frac{1}{2}$ tang s seyn, so daß man der Aufgabe gemäß hat: $\frac{1}{2}\, s = \frac{\frac{1}{2}\text{ tang } s}{m}$

oder auch $\frac{1}{m} = \frac{s}{\text{tang } s}$, woraus s nach (Kap. 3) gefunden wird. Für die gegenwärtige Eulerische Aufgabe, wo $m = 2$, findet man nach (13. Kap. 3): $s = 66^\circ\ 46'\ 54{,}5''$.

8. Aufgabe.

In dem Kreisquadranten ACB den Bogen AE zu finden, der seiner Sehne AE gleich ist, wenn selbe bis zu dem Durchschnittspunkte F verlängert ist, wo sie nämlich den einen verlängerten Schenkel CB des Quadranten schneidet. (Fig. 9.)

Auflösung.

Es sei der Bogen AE = 2 s, so ist seine Sehne AE = 2 sin s, der Sinus versus AD = 1 — cos 2 s = 2 sin s . sin s; daher die ähnlichen Dreiecke ADE, ACF geben 2 sin s sin s : 2 sin s = 1 : 2 s, und es folgt 2 s sin s = 1, oder auch $\frac{s}{\text{cosec } s} = \frac{1}{2}$, woraus nach (12. Kap. 6) sich ergibt: $s = 42^\circ\ 26'\ 49{,}43''$, und sohin ist der gesuchte Bogen AE $= 84^\circ\ 53'\ 38{,}86''$.

9. Aufgabe.

Alle Bögen zu finden, die ihren Tangenten gleich sind.

Auflösung.

Diese Aufgabe ist bloß ein besonderer Fall des Kap. 3, indem hier das dortige q = 1, und findet ihre Lösung in (7) des besagten Kapitels.

IX.

Diesen 8 Eulerischen Aufgaben mag auch die folgende noch beigefügt werden:

Zwei Kreisflächen, die eine größere von dem Halbmesser R, die andere kleinere von dem Halbmesser r, liegen concentrisch über einander; die größere soll nun so über die kleinere weggeschoben werden, daß von dieser kleinern nur noch die Fläche a bedeckt bleibt; wie groß ist von jedem Kreise der in der Fläche des andern Kreises liegende Bogen?

1. Der nach der Verschiebung noch bedeckte Theil der kleinern Kreisfläche besteht aus zwei Segmenten, welche die Sehne zwischen den Durchschnittspunkten beider Kreise gemeinsam haben; das eine Segment gehört aber dem größeren, das andere dem kleinern Kreise an. Der Centriwinkel des Seg-

mentes im kleinern Kreise heiße φ, jener im größern ψ. Hienach ergibt sich das Segment des kleinern Kreises $= \frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi)$, und das Segment des größern Kreises $= \frac{R^2}{2}(\psi - \sin\psi)$

und folglich der Aufgabe gemäß

$$\frac{r^2}{2}(\varphi - \sin\varphi) + \frac{R^2}{2}(\psi - \sin\psi) = a.$$

2. Heißt ferner c die gemeinsame Sehne beider Segmente, so findet sich aus dem kleinern Kreise $c = 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}$, und aus dem größern $c = 2\,R \sin\frac{\psi}{2}$

folglich $r \sin\frac{\varphi}{2} = R \sin\frac{\psi}{2}$ oder

$$\frac{\psi}{2} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\psi}{2}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\psi}{2}\right)^5 - \ldots$$

$$= \frac{r}{R}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^5 - \ldots\right)$$

3. Setzt man nun

$$\psi = A\varphi + B\varphi^3 + C\varphi^5 + D\varphi^7 + E\varphi^9 + F\varphi^{11} + \ldots$$

so ergibt sich nach der gewöhnlichen Methode der unbestimmten Coefficienten:

$$A = \frac{r}{R}$$

$$B = -\frac{r(R^2 - r^2)}{2.3.4\,R^3}$$

$$C = \frac{r(R^4 - 10\,r^2 R^2 + 9\,r^4)}{2.3.4.5.16.R^5}$$

$$D = -\frac{r(R^6 - 91\,r^2 R^4 + 315\,r^4 R^2 - 225\,r^6)}{2.3.4.5.6.7.64\,R^7}$$

$$E = \frac{r(R^8 - 820r^2R^6 + 8694r^4R^4 - 18900r^6R^2 + 11025r^8)}{2.3.4.5.6.7.8.9.256.R^9}$$

$$F = -\frac{r}{2.3\ldots11.1024.R^{11}}[R^{10} - 7381r^2R^8 + 224730r^4R^6$$

$$- 1143450r^6R^4 + 1819125r^8R^2 - 893825r^{10}]$$

u. s. w., und folglich

$$\psi = \frac{r\varphi}{R} - \frac{r(R^2 - r^2)\varphi^3}{2.3.4.R^3} + \frac{r(R^4 - 10r^2R^2 + 9r^4)\varphi^5}{2.3.4.5.16.R^5} - \ldots$$

4. Die Gleichung in (1) geht durch Substitution der treffenden Reihen für sin φ und sin ψ und nach kurzer Reduktion über in:

$$r^2\left(\varphi^3 - \frac{\varphi^5}{4.5} + \frac{\varphi^7}{4.5.6.7} - \frac{\varphi^9}{4.5.6.7.8.9} + \frac{\varphi^{11}}{4.5.7.8\ldots11} + \ldots\right)$$

$$+ R^2\left(\psi^5 - \frac{\psi^5}{4.5} + \frac{\psi^7}{4.5.6.7} - \frac{\psi^9}{4.5\ldots9} + \frac{\psi^{11}}{4.5\ldots11} - \ldots\right) = 12a$$

5. Substituirt man hier statt ψ^3, ψ^5 u. s. w. die aus der Gleichung in (3) zu berechnenden Werthe, so erhält man:

$$r^2\left(\varphi^3 - \frac{\varphi^5}{4.5} + \frac{\varphi^7}{4.5.6.7} - \frac{\varphi^9}{4.5.6.7.8.9} + \frac{\varphi^{11}}{4.5\ldots11} - \ldots\right)$$

$$+ R^2\left(\frac{r^3\varphi^3}{R^3} - \frac{r^3(5R^2 - 3r^2)\varphi^5}{2.4.5.R^5} + \frac{r^3(91R^4 - 210R^2r^2 + 135r^4)\varphi^7}{4.5.6.7.16.R^7}\right.$$

$$- \frac{r^3(205R^6 - 1449R^4r^2 + 2835R^2r^4 - 1575r^6)\varphi^9}{4.5.6.7.8.9.16.R^9}$$

$$+ \frac{r^3\varphi^{11}}{4.5\ldots11.256.R^{11}}[7381R^8 - 149820R^6r^2 + 618310R^4r^4$$

$$\left.- 823020R^2r^6 + 346305r^8] - \ldots\right) = 12a$$

und endlich nach gehöriger Reduktion:

$$\varphi^5 - \frac{(2R^3 + 5R^2r - 3r^3)\varphi^5}{2.4.5.R^2(R+r)} + \frac{(16R^5 + 91R^4r - 210R^2r^3 + 135r^5)\varphi^7}{4.5.6.7.16.R^4(R+r)}$$

$$- \frac{(16R^7 + 205R^6r - 1449R^4r^3 + 2835R^2r^5 - 1575r^7)\varphi^9}{4.5.6.7.8.9.16.R^6(R+r)}$$

$$+\frac{\varphi^{11}}{4.5\ldots11.256.R^{11}}[256\,R^9+7381\,R^8\,r-149820\,R^6\,r^3$$

$$+618310R^4r^5-823020R^2r^7+346305r^9]-\ldots=\frac{12aR}{r^2(R+r)}$$

6. Durch Umkehrung ergibt sich hieraus:

$$\varphi=\left(\frac{12aR}{r^2(R+r)}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{(2R^3+5R^2r-3r^3)}{2.3.4.5.R^2(R+r)}\cdot\frac{12aR}{r^2(R+r)}+\ldots$$

welche Reihe für jeden bestimmten Fall der Aufgabe aus der Gleichung (in 5) nach der allgemeinen Umkehrungsformel leicht noch weiter entwickelt werden kann, was hier im Allgemeinen zu weitläufig wurde.

7. Für $R=r$ ist diese Aufgabe außerdem noch leicht auf die 3te oder 4te der vorstehenden Eulerischen zu bringen, indem sich für diesen Fall aus (1) ergibt: $r^2(\varphi-\sin\varphi)=a$.

Diese Beispiele mögen genügen, das Verfahren zu zeigen, nach welchem derartige vorkommende Aufgaben sich lösen lassen.

Fig. 1.

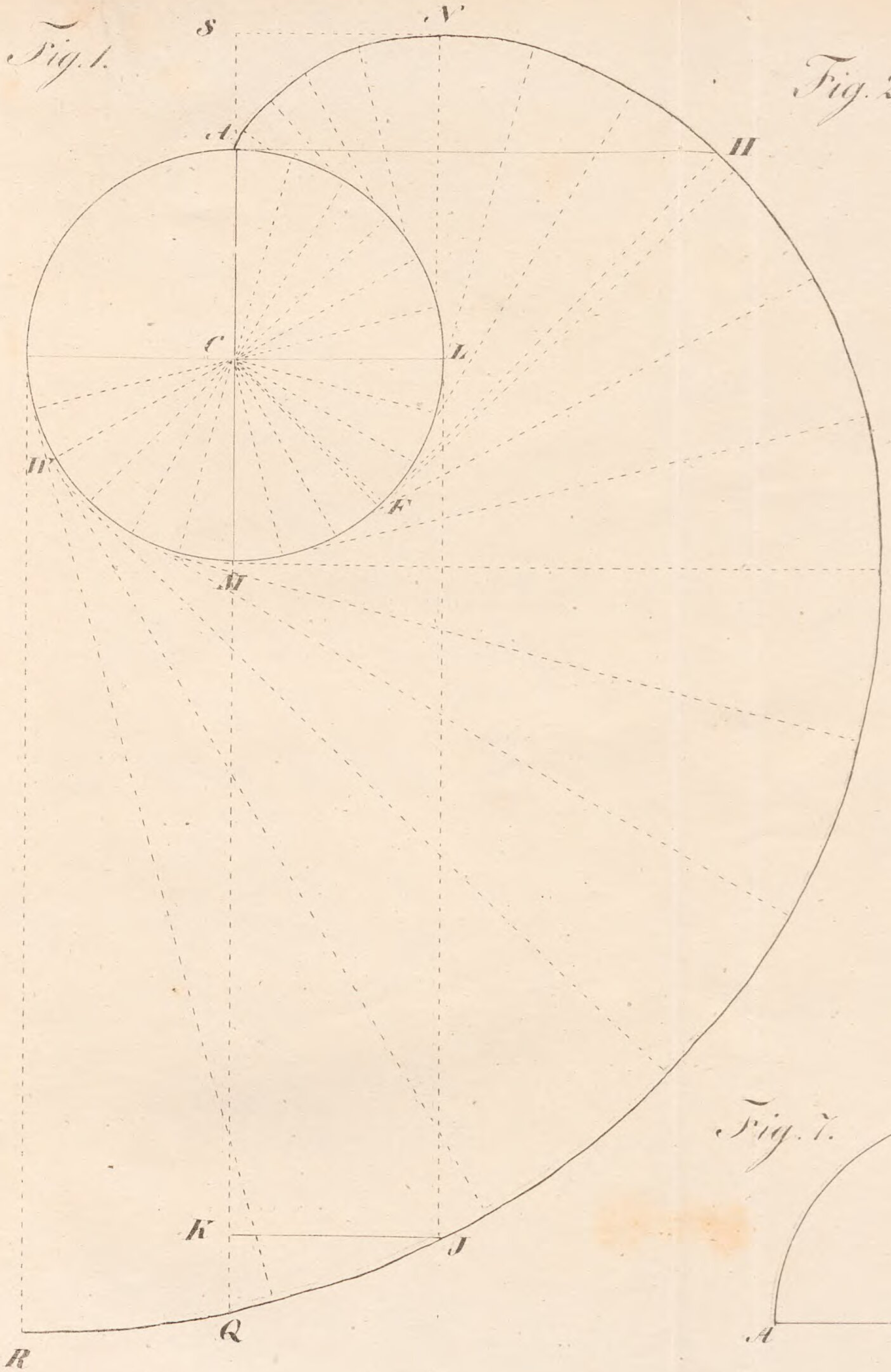


Fig. 2.

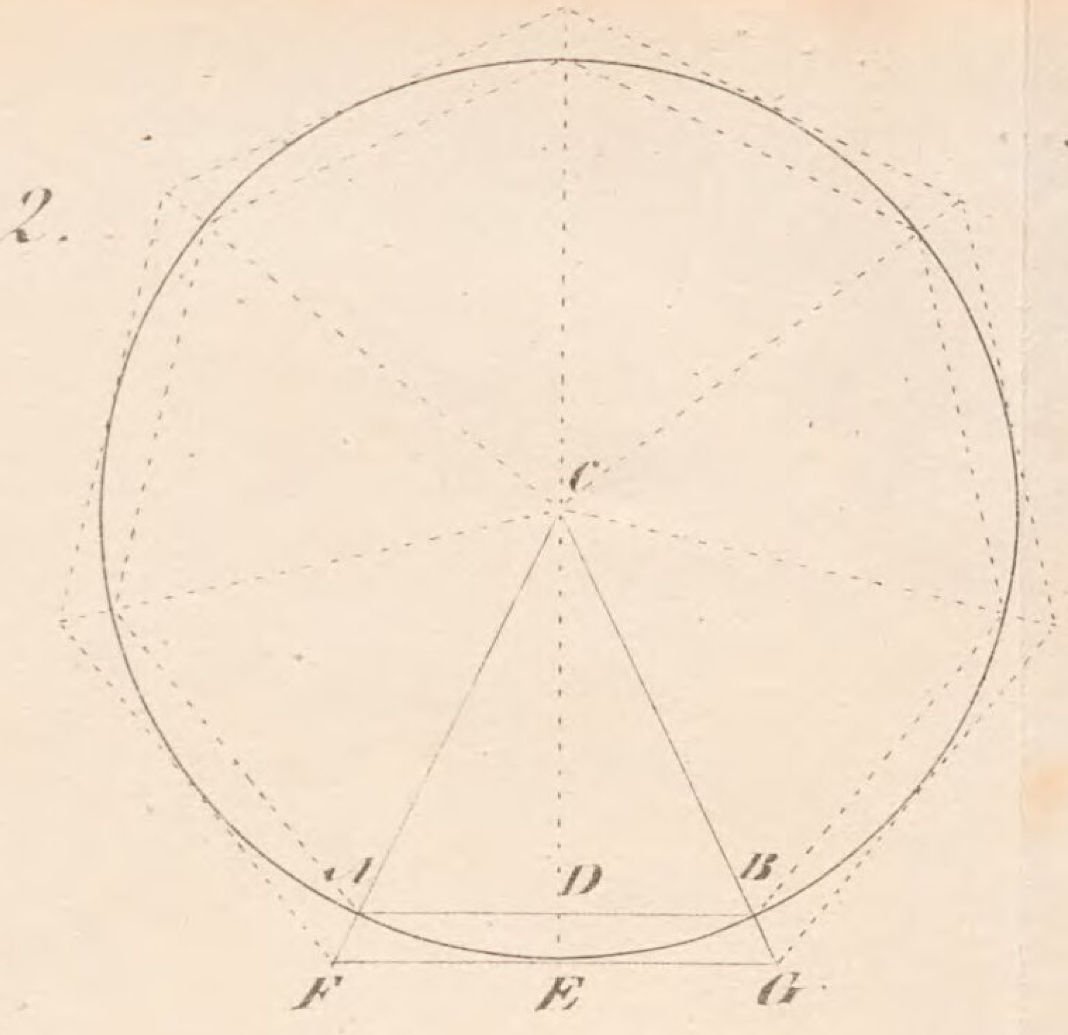


Fig. 3.

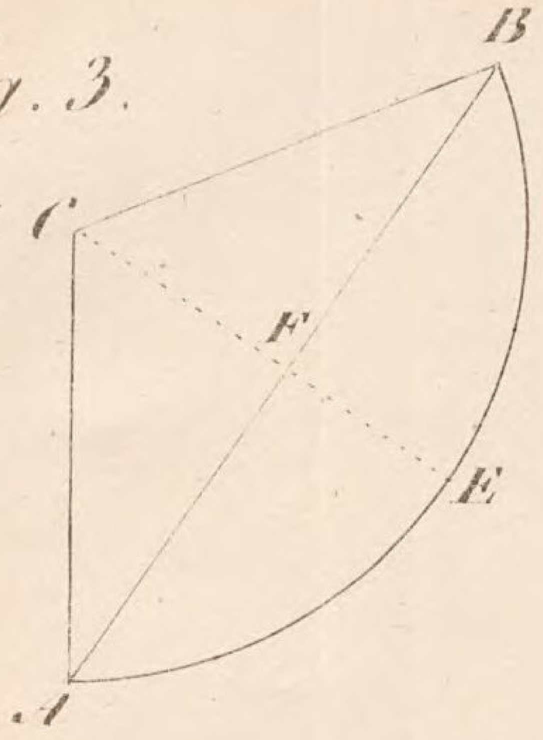


Fig. 4.

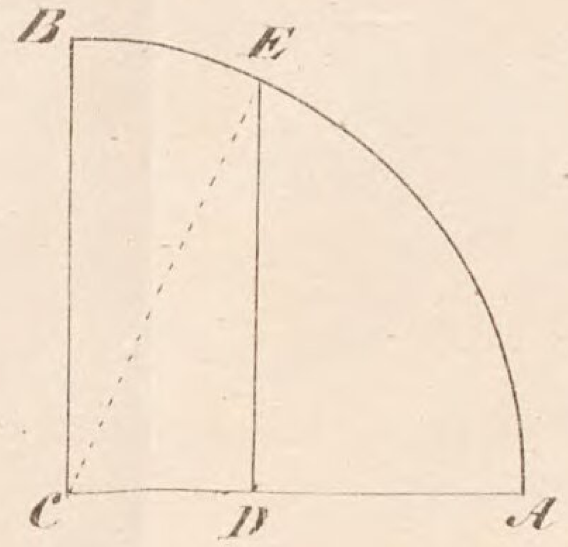


Fig. 5.

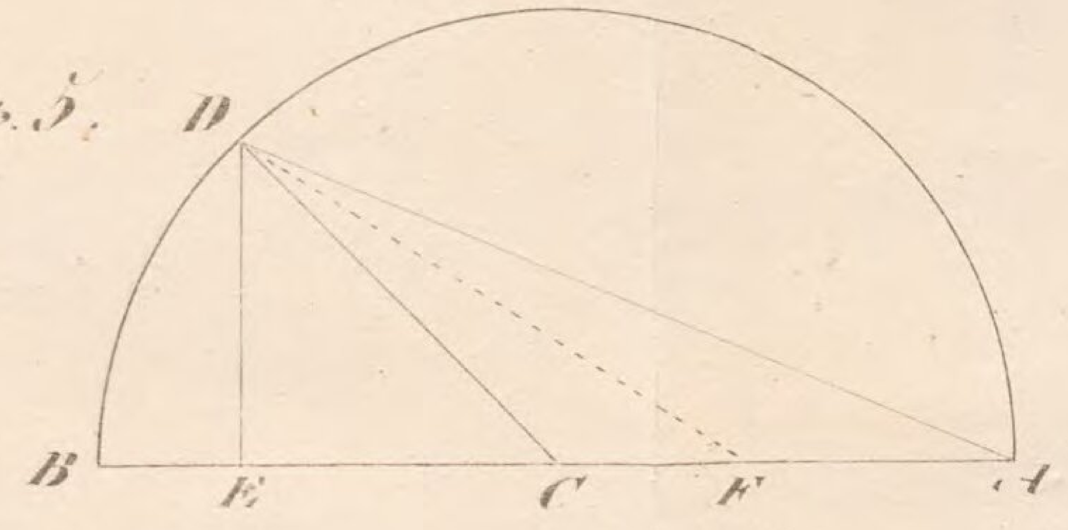


Fig. 6.

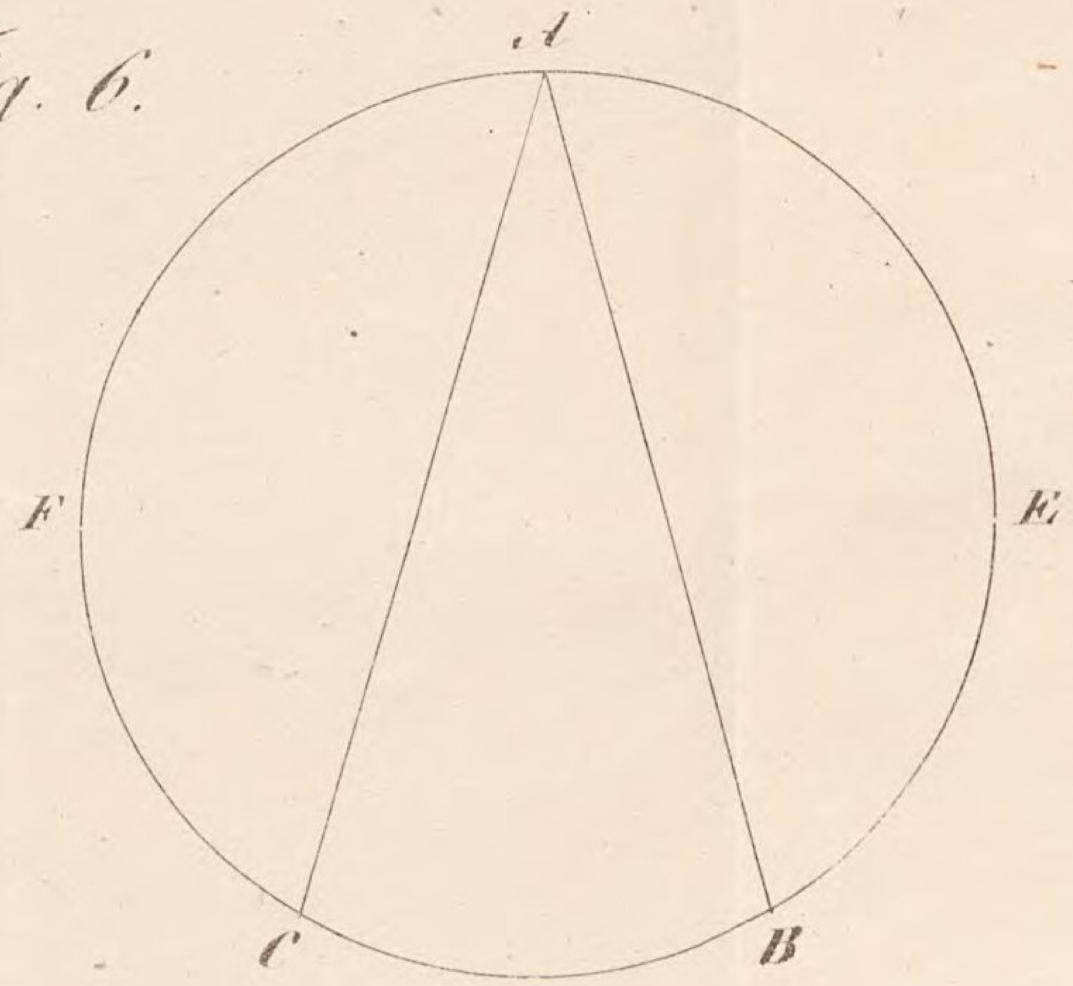


Fig. 7.

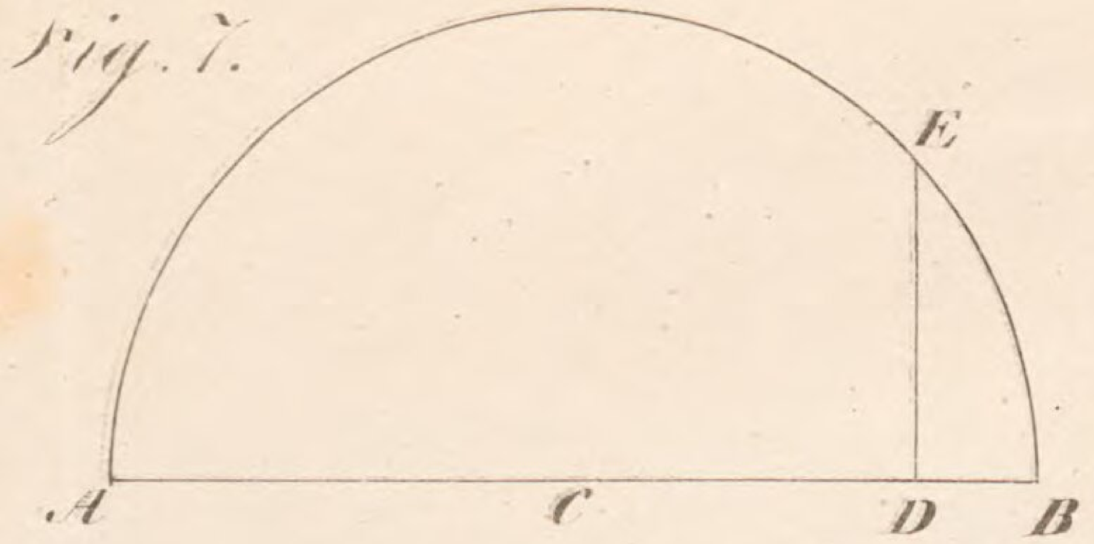


Fig. 8.

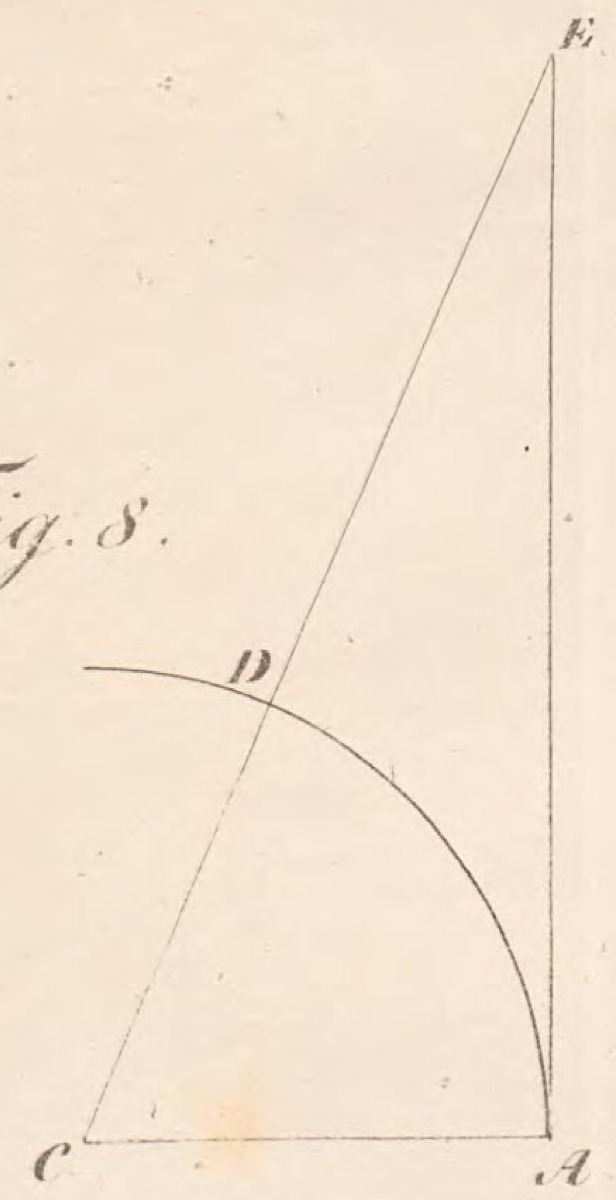
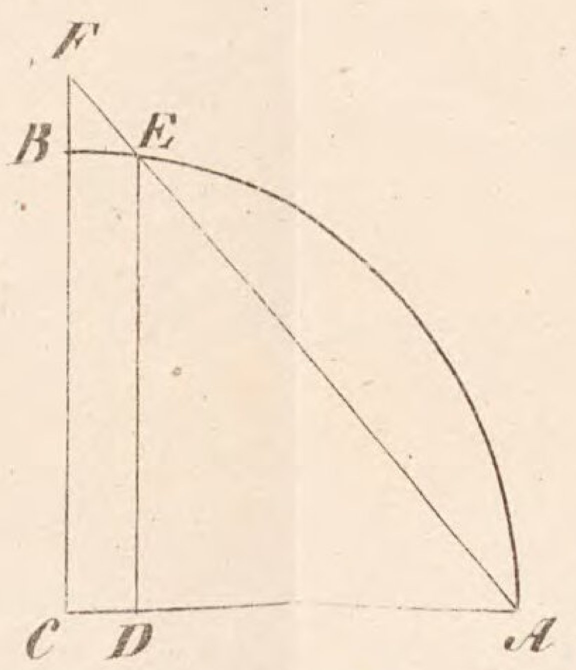


Fig. 9.



Im Verlage von Georg Joseph Manz in Regensburg ist erschienen, und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Aichingers, C. F., Versuch über die seufzende Creatur. 8. 1772. 8 kr. od. 2 gr.

Aschenbrenner, M., Lehrbuch der Metaphysik. Ein Versuch zur Begründung der Harmonie des Universums. gr. 8. 1830. 1 fl. 12 kr. od. 16 gr.

Benzel-Sternau, Graf Christ. v., Publikola, oder gesammelte Blätter guter Absicht, 1ster Theil. 8. 1805. 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

— — 2ter Theil. 8. 1806. 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Brauser, Dr. E. N., Versuch einer Erläuterung der Grundwahrheiten der Philosophie. Nebst angehängter systematischer Uebersicht der Kunstlehre. 8. 1808. 36 kr. od. 8 gr.

Butte's Dr. W., Grundlinien der Arithmetik des menschlichen Lebens, nebst Winken für deren Anwendung auf Geographie, Staats- und Naturwissenschaft, nebst IX Tabellen. gr. 8. 1811. Schreibpap. 5 fl. 24 kr. od. 3 Thlr.

— — dasselbe. Druckpap. 4 fl. 30 kr. od. 2 Thlr. 12 gr.

De l'Influence des beaux arts sur la félicite publique, par Charles de Dalberg, membre de plusieurs academies. gr. 8. 1806. 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr.

Eckhartshausen, Hofr. Carl v., Entwurf zu einer ganz neuen Chemie durch die Entdeckung eines allgemeinen Naturprincips, wodurch sich das phlogistische System der Alten und das antiphlogistische der neuern Chemisten als 2 Extreme in einem Mittelsystem vereinigen lassen rc. 8. 1800. 1 fl. 15 kr. od. 20 gr.

— — chemische Versuche über die Radical-Auflösung der Körper, besonders der Metalle. 8. 1801. 30 kr. od. 8 gr.

Furtmair, M., Bemerkungen über künftige Einrichtung bayerischer Lyceen. gr. 8. 1834. 24 kr. od. 6 gr.

— — Bemerkungen über den Werth und die Bedeutung der bayerischen Lyceen, mit besonderer Rücksicht auf die Schrift des Hrn. Hofrath Thiersch: „Ueber gelehrte Schulen." gr. 8. geh. 18 kr. od. 4 gr.

Heigl, G. A., die Platonische Dialektik. gr. 8. 1812. 54 kr. od. 12 gr.

— — die Plotinische Physik. gr. 8. 1815. 1 fl. 21 kr. od. 18 gr.

Jullien, M. A., über die beste Benützung der Zeit, als erstes Mittel zum glücklichen Leben. Besonders für junge

Leute von 15 — 25 Jahren. Nach der neuesten Auflage aus dem Französischen übersetzt von Dr. J. A. Schultes. 2te Ausgabe. 8. geh. 1 fl. 21 kr. od. 20 gr.

Urtheile über dieß Werk.

Die große Aufgabe, die ein Reisender täglich zu lösen hat, ist, viel in wenig Zeit zu thun. Ihr Werk muß mich daher vorzüglich interessiren. Ich habe es studiert, sobald es herauskam. Bei der Aufnahme, die es allgemein fand, und bei dem Eindrucke, den es auf Personen macht, deren Urtheile von großem Ansehen sind, ist es nicht meine Sache, Sie zu loben ꝛc.

von Humboldt.

Ihr vortreffliches Werk über die beste Benützung der Zeit ist eine Wohlthat für die Menschheit. Ich lasse es in's Deutsche übersetzen. Es soll der Gegenstand täglicher Lectüre auf den Lyceen meines Landes seyn. Ueberhäuft mit unendlicher Arbeit, wie Sie es sind, ist es eben so selten als schön, Augenblicke zu finden, um allgemein nützliche Wahrheiten mit einer so kraftvollen Beredsamkeit darzustellen. Fürst Primas.

Kant's, J., Logik, ein Handbuch zu Vorlesungen. gr. 8. Königsberg. 1800. 45 kr. od. 12 gr.

Kollers, J., Entwurf zur Geschichte und Literatur der Aesthetik, von Baumgarten bis auf die neueste Zeit. 8. 1799. 30 kr. od. 8 gr.

Magold, M., mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen. 5 Thl. Auch u. d. Titel: Lehrbuch der Mechanik fester Körper. 2ter Bd.: Angewandte Mathematik. Mit 8 Kupf. und 8 Tab. gr. 8. 1813. 4 fl. 48 kr. od. 2 Thlr. 16 gr.

Meiners, Joh. Wernh., Lehre von der Freiheit der Menschen, nach den in dem Prediger Salomo zum Grunde liegenden Begriffen entworfen. gr. 8. 1784. 40 kr. od. 10 gr.

Pölitz, K. H. L., Handwörterbuch der Wissenschaften und Künste, nach ihrer allmäligen Entwickelung bis zu ihrer gegenwärtigen Gestalt, 1ster Theil, A bis H. gr. 8. 1805. 4 fl. 15 kr. od. 2 Thlr. 20 gr.

Rixner's, T. A., Aphorismen aus der Philosophie, als Leitfaden für den ersten Unterricht der angehenden Wissenschafts-Candidaten. 1tes Heft 1te und 2te Abtheilung. gr. 8. 1809. 45 kr. od. 10 gr.

Schad's, J. B., System der Natur- und Transcendentalphilosophie in Verbind. 2 Thle. gr. 8. 1804—5. 4 fl. 51 kr. od. 2 Rthlr. 16 gr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Steinberger, Andreas

Das Verhältniß des Kreisbogens zu seinen zuständigen trigonometrischen Functionen vollständig bearbeitet

Regensburg 1839

Math.p. 541 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082887-9